Handreichung 27*: Die Bewegung einer Rakete

Waldemar Tausendfreund†

10. Januar 2002

Vorwort

Zielpublikum: Ursprünglich war die „Handreichung“ nur für die Arbeitsgemeinschaft „Faszination Physik“gedacht; doch nachdem ich sie gründlich überarbeitet habe, möchte ich mit ihr alle Physik-Fans ansprechen, die schon differenzieren können – oder sich vorgenommen haben, diese Kulturtechnik zu erarbeiten.

Physikalische Grundbegriffe dieser Handreichung: Die *Bewegung* eines Massenpunkts als Funktion der Zeit, seine *augenblickliche* Geschwindigkeit und seine *augenblickliche* Beschleunigung. [Im Abschnitt 2.3 dieser Handreichung habe ich die Begriffe und ihre Zusammenhänge skizziert.]

Die mathematische Grundvoraussetzung dieser Handreichung: Elementare *Differentialrechnung*, im Einzelnen ein Verständnis des Begriffs der *Ableitung* (des *Differentialquotienten*) und elementare *Ableitungsregeln*: Summenregel, Produktregel, Potenzregel, Kettenregel und speziell die Ableitung des Logarithmus.

(Die Integralrechnung wird hier nicht vorausgesetzt. Und weil es hier nur um die *geradlinige* Bewegung einer Rakete geht, brauchen wir auch keine Vektorrechnung.)

Einmal die Woche kommen wir zusammen, rund ein Dutzend junger Leute und ein Physiklehrer, skizzieren Fluktuationen im Vakuum oder Wurmlöcher durch die Raumzeit, berechnen Zeitreisen oder die Hawking-Strahlung – und manchmal auch etwas Klassisches wie die *Bewegung einer Rakete*.

Die Arbeitsgemeinschaft nennt sich stolz „Faszination Physik“, und seit über drei Jahren treffen wir uns bei DESY in Hamburg-Bahrenfeld. Jeden Samstag der Hamburger Schulzeit einigen wir uns, streng demokratisch, welches Hauptthema und welche Nebenthemen wir uns für den Tag vornehmen: und immer wieder sind es physikalische und mathematische Themen der Oberstufe – oder der Universität. Die Leute aus der *Oberstufe* und die Fortgeschrittenen aus der *Mittelstufe* bestimmen die Themen.

*Handreichung 27 für die Arbeitsgemeinschaft „Faszination Physik“, Gesprächskreis für junge Leute beim DESY (Deutsches Elektronen-Synchrotron), siehe auch unsere Website http://www.desy.de/faszination.physik

†Waldemar.Tausendfreund@desy.de

Sie haben es erraten, der Physiker in der Arbeitsgemeinschaft bin ich, dessen Vorwort Sie gerade lesen. Diese „Handreichung“ habe ich für Interessierte der Oberstufe – und für besonders Interessierte der Mittelstufe – geschrieben (die erste handschriftliche Fassung war für den Hausgebrauch in der „Faszination Physik“ gedacht). *Jedenfalls sollte dieser Aufsatz für Elftklässler lesbar sein* (Elftklässler, die lernen wollen, Differentialgleichungen zu lösen): Wer einfache Funktionsterme differenzieren kann, sollte alle Rechnungen ohne Mühe nachvollziehen können. Natürlich wendet sich der Text auch an alle jung Gebliebenen, die nicht mehr zur Schule gehen und die etwas über die Bewegung von Raketen erfahren wollen – und die das Lösen von Differentialgleichungen üben wollen.

Gerne hätte Christoph, unser Webmaster, schon früher eine Handreichung von mir an seine Website gehängt, ein paarmal hat er zart vorgefühlt. Schon vor drei Jahren hatte ich damit begonnen, Handreichungen innerhalb der Arbeitsgemeinschaft zu verteilen, die ich auf meinem Macintosh in *RagTime3.2* geschrieben hatte. Aber weder Z. noch Christoph noch sonst jemand konnte diese Texte ins Internet stellen. So blieb mir nichts anderes übrig, als LaTeX zu lernen und anzufangen, eine Handreichung in LaTeX zu schreiben: diese 27. Handreichung.

Lieber Physik-Fan, wenn Sie sich vornehmen, die *Bewegung einer Rakete* zu berechnen (den Ort einer Rakete als Funktion der Zeit), und niemand erzählt Ihnen, wie das geht, dann könnten Sie Ihr Ziel auf zwei Wegen erreichen:

• Erstens, Sie könnten diese Physik irgendwo *nachlesen*. Fangen Sie mit guten Sachbüchern an! Zwar bringen Sachbücher keine höhere Mathematik, sonst würden sie sich nicht gut verkaufen. Trotzdem rate ich Ihnen, in die Sachbücher von Ruppe [1] oder Sänger [2] zu sehen – und wenn Sie die Gelegenheit haben, sie im Antiquariat käuflich zu erwerben: In diesen Büchern gewinnen Sie das nötige Hintergrundwissen.

Wenn Sie lernen wollen, die *Bewegung einer Rakete* auszurechnen, sollte ein Schulbuch genau das Richtige für Sie sein. Leider kenne ich kein Lehrbuch der Raketenphysik für Leistungskurse der Oberstufe; für Grundkurse gibt es eines über newtonsche Gravitation und Elemente der Raumfahrt, das die Bewegung von Raketen kurz behandelt [3]. Für Lehrende in der Mittelstufe erschien in den siebziger Jahren eine Unterrichtshilfe mit praktischen Hinweisen [4], die auch heute noch nützlich wären, auch in den Grund- und Leistungskursen der Studienstufe – nur wer von den dort Lehrenden kennt sie? (Ich selbst bin erst jetzt auf sie gestoßen, bei der Literatursuche für diesen Aufsatz.)

Um zu sehen, mit welchen Büchern Sie, lieber Fan, arbeiten könnten, guckte ich mir zuerst die Lehrbücher und Aufgabensammlungen für den Schulunterricht an, die ich (als Lehrer) mehr oder weniger zufällig besitze, für die Oberstufe sind es sieben Lehrbücher und eine Aufgabensammlung. – Lassen Sie mich mit der guten Nachricht beginnen: In vier der sieben Lehrbücher [5]–[8] wird die Bewegungsgleichung der Rakete hergeleitet, eines davon, der *Höfling* [5], ist mit sechs Seiten zum Thema recht ausführlich (gut eine Seite davon behandelt die Mehrstufenrakete, die ich hier ganz außer acht lasse), und in einem Buch [6] und in seinem Vorgänger [7] wird die Raketengrundgleichung jeweils auf einer Buchseite begründet und ausgewertet. Und ein fünftes der Lehrbücher verbindet die Rakete mit einem Alltagsgegenstand der jungen Leute: es behandelt eine Fußballblase als Rakete [9]. – Aber für Elftklässler, die sich in die Theorie der Raketenbewegung einlesen wollen, wiegt die schlechte Nachricht schwerer: Die mir bekannten Schulbücher, in denen die Bewegungsgleichung der Rakete gelöst wird (ich vermute alle Oberstufenlehrbücher, die so weit gehen), machen dabei von der *Integralrechnung* Gebrauch! Und die Integralrechnung wird an deutschen Schulen gewöhnlich erst im 12. Schuljahr behandelt.

Für diejenigen von Ihnen, die eine ganz kurze Herleitung vorweg lesen möchten, habe ich eine Liste einschlägiger Enzyklopädien zusammengestellt: [10] – [15]. Natürlich setzen auch alle Enzyklopädien in ihren Herleitungen der Raketengrundgleichung die *Integralrechnung* voraus.

Also wenn Sie im 10. oder 11. Schuljahr sind, könnten Sie sich die Theorie der *Bewegung einer Rakete* noch nicht aus Büchern anlesen – außer Sie eignen sich vorher die Grundlagen der Integralrechnung an.

• Oder zweitens, Sie könnten sich diese Physik (mit der zugehörigen Mathematik) *selbst überlegen.* Angenommen, Sie wollten sich die Theorie der Raketenbewegung ohne Hilfen erarbeiten, sagen wir mit dem Ziel, die Bewegung der kräftefreien Rakete und der Rakete im homogenen Schwerefeld zu berechnen. Und angenommen, Sie könnten schon differenzieren und ausrechnen, wie sich ein frei fallender oder ein geworfener Stein bewegt – Sie wissen also, was eine *augenblickliche* Geschwindigkeit und eine *augenblickliche* Beschleunigung bedeuten, und erst recht eine *Bewegung.* Dann müssten Sie, um ihr Ziel ganz allein, ohne Hilfe zu erreichen, vielleicht Monate dafür veranschlagen. Könnten Sie sich das leisten, dann gratuliere ich Ihnen! Sie wären in der Lage von Tsiolkovsky oder Oberth, was das Arbeiten ohne Hilfe angelangt; aber Sie wären kein Raketenpionier. Die meisten von uns könnten sich das nicht leisten, und auch Sie sollten nicht allein für sich arbeiten – außer Sie wären Millionär, und genau dazu wollte ich Sie beglückwünschen!

Doch mit einer *Beschreibung des Weges* zu den Raketenbewegungen, die Ihnen an jeder Gabelung des Weges Ihr nächstes Zwischenziel vorschlägt und Ihnen Strecken großer Steigung erspart (Ihnen noch keine Integralrechnung zumutet), mit so einer Beschreibung könnten Sie das Ziel schon in Wochen erreichen (wenn Sie nur differenzieren können) – und könnten unterwegs auch die Landschaft genießen. So eine Wegbeschreibung zur Theorie der Raketenbewegung (allein auf der Grundlage der Differentialrechnung), *geschrieben für Elftklässler*: Hinweise, Empfehlungen und Aufgabenvorschläge samt Musterlösungen, das ist es, was ich Ihnen hier mit dieser „Handreichung“ anbiete.

Und wenn Sie erst im 10. Schuljahr sind, aber so stark motiviert, dass Sie sich schon lange die Grundlagen der Differentialrechnung in einem guten Mathematik-Lehrbuch aneignen wollten, dann müssten Sie nicht warten, bis Sie ein Jahr älter geworden sind: Dann könnten auch Sie mit ein wenig Differentialrechnung und meinen Hilfen und Hinweisen bald die *Bewegung einer Rakete* berechnen.

Ja, Physik und Mathematik bilden eine Einheit, Physik ohne Mathematik gibt es nicht. Die *Kinematik* eines geworfenen Steins könnten Sie schon mit elementarer Mathematik, ganz ohne „höhere“ Mathematik voll verstehen – das konnte schon Galileo Galilei. (Unter *Kinematik* als Zweig der Physik verstehen wir die Lehre von den Bewegungen eines Körpers – mit einer Einschränkung: die Bewegungen werden beschrieben, ohne auf die Kräfte einzugehen, die an dem Körper angreifen.) Und doch, wer sich bereits mit den Elementen der Differentialrechnung vertraut gemacht hat, überblickt die Kinematik von einem höheren Standpunkt aus. Unbedingt aber brauchen Sie zum Verständnis der *Dynamik* des Wurfs etwas Differentialrechnung und etwas Theorie der Differentialgleichungen. (Unter *Dynamik* als Zweig der Physik verstehen wir die Lehre von den Bewegungen eines Körpers, in der die Bewegungen aus der Wirkung der Kräfte auf den bewegten Körper erklärt werden.) Und etwas von beidem, der Differentialrechnung und der Theorie der Differentialgleichungen, brauchen Sie auch, wenn Sie die *Bewegung einer Rakete* beherrschen wollen.

Sollten Sie bisher noch nicht dazu gekommen sein, sich mit *Kinematik* oder mit *Differentialgleichungen* zu beschäftigen, so müssen Sie Ihr Vorhaben noch nicht aufgeben: In einem eigenen Hauptabschnitt habe ich die Begriffe zusammengestellt, die im Folgenden gebraucht werden und von denen ich vermute, dass sie Ihnen möglicherweise noch nicht alle begegnet sind, nämlich im Hauptabschnitt „2 Begriffliches“. Vielleicht versuchen Sie es einmal im Lesesaal einer öffentlichen Bibliothek mit einem physikalischen und einem mathematischen Lexikon, besser noch mit mehreren Lexika, und beginnen dort über diejenigen Begriffe zu meditieren, die für Sie neu sind!

Inhaltsverzeichnis

1 Historische Einleitung

Physikalische Themen: Geschichte der Lösungen der *Bewegungsprobleme* von Kanonenkugeln und Raketen. Ein *Vorurteil* über die Dynamik der Rakete.

Mathematische Anforderungen: Die Kenntnis der *quadratischen Funktionen* und des *natürlichen Logarithmus.*

Wann die ersten Raketen gebaut wurden, können die Historiker nur schätzen: „Die Rakete wurde zwischen 1000 und 1200 in China erfunden“ [16]. “Most historians of rocketry maintain that the Chinese developed the first practical military rockets in the 13th century, though it is likely that fireworks were in use at an even earlier date” [17].

Wir wissen, dass in Europa nur Jahrzehnte (oder weniger?) vergingen, bis das hier nacherfundene Schießpulver in Raketenwaffen eingesetzt wurde: Seit der zweiten Hälfte des 13. Jahrhunderts bediente sich das europäische Kriegshandwerk des Schießpulvers in Raketen – etwas früher als in Geschützen und viel früher als in Gewehren. (Gewehre konnten es lange Zeit mit Pfeil und Bogen nicht aufnehmen – denken Sie nur an den hundertjährigen Krieg zwischen Frankreich und England, ein Thema und eine Zeit, die Dichter wie Schiller und Shaw fasziniert haben und neuerdings auch Science-Fiction-Autoren [18], [19].) Jahreszahlen über erste Einsätze von Raketen nennt Josef Stemmer 1952 in seinem 40 Seiten langen „geschichtlichen Überblick zur Rückstosstechnik“ [20]; für Hinweise auf den heutigen Stand des Wissens wäre ich dankbar!

Gelehrte und Geschützmeister dachten über die Bahnen von Kanonenkugeln nach – mit psychologisch interessanten Ergebnissen ([21], S. 48; [22], S. 53). Es mussten drei Jahrhunderte vergehen, bis sich die Mechanik so weit entwickelt hatte, dass sie die Bewegung einer Kanonenkugel mathematisch beschreiben konnte: „Über einen sehr alten Gegenstand bringen wir eine ganz neue Wissenschaft. Nichts ist älter in der Natur als die Bewegung, und über dieselbe gibt es weder wenige noch geringe Schriften der Philosophen.“ ... „Man hat beobachtet, daß Wurfgeschosse eine gewisse Kurve beschreiben; daß letztere aber eine Parabel sei, hat noch niemand gelehrt. Daß aber dieses sich so verhält und noch vieles andere nicht minder Wissenswerte, soll von mir bewiesen werden. Und was noch zu tun übrig bleibt, zu dem wird die Bahn geebnet, zur Errichtung einer sehr weiten, außerordentlich wichtigen Wissenschaft, deren Anfangsgründe diese vorliegende Arbeit bringen soll, und in deren tiefere Geheimnisse einzudringen Geistern vorbehalten bleibt, die mir überlegen sind.“ Nach seiner Verurteilung im Inquisitionsprozess hatte Galilei in seinem Hausarrest trotz des ihm auferlegten Schreibverbots die *Discorsi* (als Fortsetzung des *Dialogo*) geschrieben und 1638 nach Holland zum Verlag Elzevir schmuggeln lassen, der sie im selben Jahr herausbrachte. Die hier zitierten Sätze aus den *Discorsi* entnahm ich Samburskys Textsammlung ([23], S. 303). Wenn Sie darüberhinaus eine kurze Inhaltswiedergabe der *Discorsi* suchen, einschließlich Galileis Kinematik des Wurfs, kann ich Ihnen die *Lecture-Notes* von Fierz empfehlen ([21], S. 52–66);

dort finden Sie auch einen Überblick der Fortschritte „der mittelalterlichen Mechanik“ ([21], S. 23–33).

Vorschlag: Nennen Sie Namen und Geburtsjahr des „überlegenen Geistes“, der als erster auf der von Galilei „geebneten Bahn“ weiter ging, und vergleichen Sie diese Jahreszahl mit dem Todesjahr Galileis!

Lösung: Newton wurde 1642, im Todesjahre Galileis, geboren (falls Sie eine andere Jahreszahl in Erinnerung haben: Newton wurde am 25. Dezember 1642 nach dem *Julianischen* Kalender geboren, das war am 4. Januar 1643 nach dem *Gregorianischen* Kalender [24]). □

Nach Galileis Überlegungen zum *Wurf* mussten wieder rund drei Jahrhunderte vergehen – und das in einer Zeit, in der sich die Entwicklung der Mechanik beschleunigte! –, bis jemand das Bewegungsproblem der *Rakete* lösen konnte. Denn die Bewegung einer Kanonenkugel ist ihrem Wesen nach einfacher als die Bewegung einer Rakete: Um die idealisierte Bewegung einer Kanonenkugel in dem als homogen angenommenen Feld der Schwerebeschleunigung mathematisch zu beschreiben, brauchen wir nur eine *quadratische Funktion* (wenn wir die Corioliskraft und die Luftreibung vernachlässigen). Aber um nur die idealisierte Bewegung einer kräftefreien Rakete als mathematische Funktion wiederzugeben (etwa einer Pulverrakete, deren Abbrandgeschwindigkeit konstant und deren Luftwiderstand unmerklich klein sein soll), müssen wir schon den *natürlichen Logarithmus* kennen. Die tiefe Ursache des Unterschieds ist die Zeitabhängigkeit der Massen dieser beiden Körper: die Masse einer Kanonenkugel ist konstant; aber die Masse einer Rakete nimmt ständig ab – solange sie ihre Treibgase ausstößt.

Im Mai 1903 veröffentlichte Konstantin Edouardovich Tsiolkovsky seine Herleitung der *Raketengrundgleichung* in einer russischen Zeitschrift ([25], S. 368f. und 555ff.). Weil diese Zeitschrift kaum aus Russland herausgelangte, musste Hermann Oberth, ein Rumänien-Deutscher, Tsiolkovskys Ergebnisse neu entdecken. Doch ehren auch westliche Physiker und Ingenieure den Ersten, der die Bewegung einer Rakete berechnet hatte, indem sie die *Raketengrundgleichung* nach ihm benennen [siehe in dieser Handreichung die Hauptabschnitte 4 und 6].

Zweifellos wurde die Entwicklung der Raketendynamik auch durch das Vorurteil erschwert, jeder Flugkörper brauche ein Medium, um beschleunigen zu können. Heute fällt es uns schwer, das Vorurteil nachzuempfinden – jedoch beherrschte es Physiker und Ingenieure noch weit in die erste Hälfte des 20. Jahrhunderts hinein. Davon weiß Herr Beusse, den einige aus unserer Arbeitsgemeinschaft in den „Nachsitzungen“ der *Hamburger Raumfahrtgespräche* persönlich kennenlernen konnten, einiges zu erzählen! (Diplom-Ingenieur Hans Beusse hatte beim *Hamburger Flugzeugbau* als Abteilungsleiter an der Entwicklung und am Bau der *ELDO A* mitgearbeitet [26], der ersten europäischen Gemeinschaftsrakete, deren drei Stufen noch einzeln in Großbritannien, Frankreich und der Bundesrepublik Deutschland gebaut wurden.)

2 Begriffliches

Physikalische Themen: Die *Rakete* und ihre Abgrenzung gegen das *Strahlflugzeug*; der *Impuls*, der *Impulssatz* (für *abgeschlossene* Systeme); *Bewegungen* (speziell im eindimensionalen Raum einer Geraden oder allgemein im dreidimensionalen Raum), *Bewegungsgleichungen*: in der Physik besonders wichtige Differentialgleichungen.

Mathematische Anforderungen: Die Kenntnis der Begriffe *Funktion, Abbildung, Differentialquotient und Differentialgleichung.*

2.1 Raketen und Strahlflugzeuge: Definitionen

Vorschlag: Sagen sie zuerst in einfachen Worten, wie ein „Strahlantrieb" funktioniert!

Lösung: Indem ein Flugkörper Treibgase nach hinten abstrahlt (mit möglichst hoher Geschwindigkeit ausstößt, sich möglichst kräftig von ihnen abstößt), wird er entsprechend stark nach vorn beschleunigt. □

Natürlich wissen Sie, was Raketen sind.

Vorschlag: Definieren Sie diesen Begriff!

Definition: *Raketen* sind Flugkörper mit Strahlantrieb, die dessen Massen- und Energiekomponenten vollständig mitführen. □

Anschlussfrage: Der Nebensatz in der Definition (die Bedingung, dass jede Rakete die Massen- und Energiekomponenten ihres Strahlantriebs vollständig mitführen soll) lässt offen, ob es andere Arten von Flugkörpern gibt, die auch durch Strahlen angetrieben werden. Gibt es derartige Flugkörper, und wenn ja, wie heißen sie?

Antwort: Ja. Wir müssen die Raketen von den „luftatmenden" Strahl- oder Düsenflugzeugen unterscheiden, die auch durch Strahlen angetrieben werden, die aber für ihren Antrieb nur Treibstoff (den zu verbrennenden Stoff, meist Kerosin) tanken und den zur Verbrennung auch notwendigen Sauerstoff aus der Atmosphäre ziehen. □

2.2 Die Grundlage der Raketendynamik: Der Impulssatz

Es soll Leute geben, die den Impulssatz nicht kennen. Klar, dass Sie nicht dazu gehören.

Vorschlag: Formulieren Sie den Impulssatz! Und damit dieser Satz schön kurz und übersichtlich ausfällt, schlage ich außerdem vor, dass Sie vorher die Begriffe „Impuls" und „abgeschlossenes System" definieren.

Definition: Der *Impuls* $p(t)$ eines Körpers ist das Produkt seiner Masse $M(t)$ und seiner Geschwindigkeit $v(t)$, und der *Impuls* $p(t)$ eines Systems von Körpern ist die Summe der Impulse $p_i(t)$ seiner Teilkörper. Kurz,

$$p(t) := M(t) \cdot v(t)$$

beziehungsweise

$$p(t) := \sum_{i=1}^{n} p_i(t) \quad ,$$

wobei die Einzelimpulse $p_i(t)$ durch die Einzelmassen $M_i(t)$ und Einzelgeschwindigkeiten $v_i(t)$ gegeben sind:

$$p_i(t) := M_i(t) \cdot v_i(t) \quad .$$

Definition: Ein *abgeschlossenes* System ist eines, das keinen Körper (kein Teilchen) und keine Energie mit seiner Umgebung austauscht. □

Manchmal ist ein Gegenbeispiel besonders erhellend.

Ein Vorschlag zwischendurch: Geben Sie (mindestens) ein Gegenbeispiel eines abgeschlossenen Systems an, also (mindestens) ein Beispiel eines *offenen* Systems!

Gegenbeispiele: Ein Strahlflugzeug ist ein *offenes* System: Es verbraucht für seinen Betrieb Luft (die nicht zu ihm gehört) – anders könnte es seinen Treibstoff nicht verbrennen.

Und natürlich ist jeder von uns ein *offenes* System: Wir alle tauschen fortwährend Gase mit der Umgebung aus – auch wenn wir den Atem anhalten, atmen wir doch durch die Haut! – und ab und zu wechseln auch kondensierte Stoffe zu uns oder von uns; und als Warmblütner tauschen wir ständig Energie mit der Umgebung aus. □

Nach diesen Vorbereitungen können wir den Satz von der Erhaltung des Impulses in aller Kürze formulieren:

Impulssatz: Der Impuls eines abgeschlossenen Systems von Körpern, auf die keine äußeren Kräfte wirken, bleibt erhalten (ändert sich nicht mit der Zeit). □

2.3 Bewegungen, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen: Definitionen

Zum Titel: Leider wird der Begriff der *Bewegung* im Physikunterricht oft gar nicht [8] und oft nur wörtlich als Änderung des Orts definiert ([6], S. 2) – obwohl die Erklärung der Bewegung ein schönes Beispiel einer Definition ist! Und leider gebrauchen manche Lehrer das Wort *Bewegungsgleichung* nicht so wie die Fachleute. (Bei manchen heißt die *Funktionsgleichung* der Bewegung eine „Bewegungsgleichung".) Testen Sie sich selbst, wie Sie den Begriff und das Wort kennengelernt haben:

Vorschläge: Definieren Sie den Begriff der *Bewegung* eines Massenpunkts, und zwar zunächst für die geradlinige Bewegung (in der der Massenpunkt auf die x-Achse beschränkt ist), und anschließend ohne diese Bewegungsbeschränkung!

Und kommentieren Sie die Definitionen, das heißt, sagen Sie dazu das, was sagenswert ist!

Spezielle Definition, 1. Fassung: Unter der geradlinigen *Bewegung* eines Massenpunkts (auf der x-Achse) verstehen wir eine Zuordnung, durch die jeder Zeitkoordinate t (jedem Zeitpunkt) eines Zeitintervalls eindeutig eine x-Koordinate x (also ein Ortspunkt auf der x-Achse) zugeordnet wird.

Spezielle Definition, 2. Fassung: Unter der geradlinigen *Bewegung* eines Massenpunkts (auf der x-Achse) verstehen wir eine Abbildung eines Zeitintervalls auf ein Intervall der x-Achse, durch die jedem Zeitpunkt des Zeitintervalls eindeutig ein Punkt des Intervalls der x-Achse zugeordnet wird, nämlich der Ort des Massenpunkts.

Mathematischer Kommentar: Wir sehen, die Zuordnung – die Abbildung – muss zwar eindeutig, aber nicht umkehrbar eindeutig sein: Sie ist es nicht für eine periodische Bewegung, auch nicht für eine gedämpfte Schwingung, auch nicht für einen von Hand ausgeführten senkrechten Wurf nach oben – wenn das jeweilige Zeitintervall der Bewegung lang genug ist! Der Wertevorrat, das Intervall der x-Achse, kann sogar die Länge null haben: Wir fassen die *Ruhe* als einen Spezialfall der Bewegung auf, als Nullbewegung.

Spezielle Definition, 3. Fassung: Unter der Bewegung eines auf die x-Achse beschränkten Massenpunkts verstehen wir eine *Funktion* der Zeit mit den zugeordneten x-Koordinaten (den Örtern des Massenpunkts) als ihren Funktionswerten.

Philosophischer Kommentar: Mit diesen Definitionen haben wir den Begriff der geradlinigen Bewegung eines Massenpunkts auf die tiefer liegenden physikalischen Begriffe der *Zeit* und der *Gerade*, also des eindimensionalen *Raums*, zurückgeführt – und den mathematischen Begriff der *Funktion* (der Funktion der Zeit mit Örtern als Funktionswerten)! □

Unterscheidung zwischen Bewegungsablauf und Bewegung? In ihrem Lehrbuch *Physik – Oberstufe, Band MS* ([9], S. 29ff.) gebrauchen Dorn, Bader und ihre Mitautoren mehrfach das Wort *Bewegungsablauf,* insgesamt achtmal auf drei Buchseiten. Im ersten Absatz des Abschnitts „2. Die Bahnkurve und der zeitliche Bewegungsablauf“ führen die Autoren diesen Begriff ein, ich zitiere: „Man kennt also mit der Bahnkurve noch nicht den *zeitlichen Bewegungsablauf.* Für einen fahrplanmäßig verkehrenden Zug entnehmen wir ihn dem Fahrplan. Dieser ordnet einzelnen Punkten der Bahnkurve entsprechende Uhrzeiten zu.“ Die Erklärung (und die Beschreibung verschiedener Verfahren zur Registrierung des *Bewegungsablaufs*) kann so verstanden werden, als meinten die Autoren mit dem *Bewegungsablauf* eine Zuordnung, die den Punkten der Bahnkurve die entsprechenden Zeiten zuordnet. (Beim Registrieren werden mehr oder weniger viele Punkte der Bahnkurve mit Zeitmarken versehen – in Analogie zum Fahrplan, wo den Haltestellen die Ankunfts- und Abfahrts-Uhrzeiten zugeordnet werden.)

Wollten wir den *Bewegungsablauf* als eine Zuordnung definieren, die jedem Ortspunkt der Bahn einen Zeitpunkt zuordnete, dann wäre die Zuordnung in vielen Fällen nicht eindeutig, also keine Funktion. Das zeigt uns schon der Fahrplan: Mit dem planmäßen Halt an einer Haltestelle werden ihrem Ortspunkt unendlich viele Zeitpunkte zugeordnet: alle Zeitpunkte des Intervalls zwischen Ankunfts- und Abfahrtszeit! So verstanden wäre also der *Bewegungsablauf* keine Funktion, sondern nur eine *Relation*. Der Begriff der Bewegung ist also, mathematisch gesehen, ein tiefer liegender Begriff als der des „Bewegungsablaufs".

Allgemeine Definition, 1. Fassung: Unter der *Bewegung* eines Massenpunkts verstehen wir eine Zuordnung, durch die jeder Zeitkoordinate t (jedem Zeitpunkt) aus einem Zeitintervall eindeutig ein Tripel $(x|y|z)$ von Ortskoordinaten (also ein Ortspunkt) zugeordnet wird.

Allgemeine Definition, 2. Fassung: Unter der *Bewegung* eines Massenpunkts verstehen wir eine Abbildung eines Zeitintervalls auf eine Kurve im Raum, nämlich auf die *Bahn* des Massenpunkts: eine Abbildung, durch die jedem Zeitpunkt des Zeitintervalls eindeutig ein Punkt der Bahn zugeordnet wird, nämlich der jeweilige Ort des Massenpunkts (im wichtigen Sonderfall der Ruhe entartet die Bahn zu einem einzigen Punkt im Raum).

Wenn wir den Begriff der Bahn nicht zugleich mit dem der Bewegung einführen wollen, wofür einiges spricht, können wir uns kürzer fassen:

Allgemeine Definition, 3. Fassung: Wir verstehen die *Bewegung* eines Massenpunkts als Abbildung eines Zeitintervalls in den dreidimensionalen Ortsraum.

Philosophischer Kommentar: Auch mit der allgemeinen Definition haben wir den Begriff der Bewegung eines Massenpunkts auf die tiefer liegenden physikalischen Begriffe der *Zeit* und des *Raums* zurückgeführt – und den mathematischen Begriff der *Abbildung* (eines Zeitintervalls in den dreidimensionalen Raum). □

Vorschlag: Definieren Sie den Begriff der *Bewegungsgleichung* eines Massenpunkts (der auf eine Gerade, die x-Achse, beschränkt ist)!

Definition: Unter der *Bewegungsgleichung* eines auf die x-Achse beschränkten Massenpunkts verstehen wir eine Differentialgleichung für die x-Koordinate des Massenpunkts als Funktion der Zeit, kurz eine Differentialgleichung für die Bewegung des Massenpunkts.

Da müssen wir uns natürlich fragen oder fragen lassen: Was aber ist nun eine *Differentialgleichung*?

Definition: Unter einer *Differentialgleichung* verstehen wir eine Gleichung zwischen *Funktionen* (oder *Funktionstermen*), in der die gesuchte *Funktion* (der gesuchte *Funktionsterm*) als Ableitung vorkommt – mindestens einmal. Die höchste Ableitung der gesuchten Funktion heißt die *Ordnung* der Differentialgleichung. Differentialgleichungen erster Ordnung sind im Allgemeinen leichter zu lösen als Differentialgleichungen zweiter Ordnung usw.

Kommentar: In der Physik, nicht nur in der Mechanik, suchen wir immer wieder nach *Funktionen*. So fragen wir in der Dynamik der Rakete nach der Geschwindigkeit der Rakete als *Funktion* der Zeit und nach dem Ort der Rakete als *Funktion* der Zeit. Die eine wie die andere Frage wollen wir beantworten, indem wir Hilfsmittel der Mathematik heranziehen: die Differentialrechnung und Elemente der Theorie der Differentialgleichungen. □

Vorschlag: Definieren Sie zunächst den Begriff der *mittleren* Geschwindigkeit eines Massenpunkts (in der Mittelstufe kennen wir keinen anderen Geschwindigkeitsbegriff) und anschließend den Begriff der *augenblicklichen* Geschwindigkeit eines Massenpunkts, und zwar beide Begriffe speziell für den Fall, dass der Massenpunkt auf die x-Achse beschränkt ist!

Definition: Unter der *mittleren* Geschwindigkeit $< v >$ eines (auf die x-Achse beschränkten) Massenpunkts in einem bestimmten Zeitintervall von t_1 bis t_2 verstehen wir die Länge $\Delta x := x_2 - x_1$ des Weges, die der Massenpunkt in diesem Zeitintervall zurücklegt, dividiert durch die Länge $\Delta t := t_2 - t_1$ dieses Zeitintervalls, kurz:

$$< v > := \frac{\Delta x}{\Delta t} := \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \qquad \Box .$$

Definition: Und unter der *augenblicklichen* Geschwindigkeit $v_1 := v(t_1)$ eines (auf die x-Achse beschränkten) Massenpunkts zu einem bestimmten Zeitpunkt t_1 verstehen wir den Grenzwert einer Folge von mittleren Geschwindigkeiten (auf der x-Achse), deren Zeitintervalle sich auf diesen Zeitpunkt t_1 zusammenziehen, gegen diesen Zeitpunkt t_1 streben, kurz

$$v(t_1) := \lim_{t_2 \to t_1} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad . \quad \Box$$

Vorschlag: Definieren Sie entsprechend die Begriffe der *mittleren* und *augenblicklichen* Beschleunigung eines Massenpunkts!

Definition: Unter der *mittleren* Beschleunigung $< a >$ eines (auf die x-Achse beschränkten) Massenpunkts in einem bestimmten Zeitintervall von t_1 bis t_2 verstehen wir den Geschwindigkeitsunterschied $\Delta v := v_2 - v_1$ zwischen Anfang und Ende dieses Zeitintervalls, dividiert durch die Länge $\Delta t := t_2 - t_1$ dieses Zeitintervalls, kurz:

$$< a > := \frac{\Delta v}{\Delta t} := \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \quad . \quad \Box$$

Definition: Und unter der *augenblicklichen* Beschleunigung $a_1 := a(t_1)$ eines (auf die x-Achse beschränkten) Massenpunkts zu einem bestimmten Zeitpunkt t_1 verstehen wir den Grenzwert einer Folge von mittleren Beschleunigungen, deren Zeitintervalle sich auf diesen Zeitpunkt t_1 zusammenziehen, gegen diesen Zeitpunkt t_1 streben, kurz

$$a(t_1) := \lim_{t_2 \to t_1} \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \quad . \quad \square$$

2.4 Zum Rahmen der hier zu entwickelnden Dynamik

Weil wir im Folgenden nur einen *ersten* Zugang zur Dynamik der Rakete suchen, wollen wir uns nicht zuviel vornehmen: Wir wollen ganz im Rahmen der *newtonschen* Mechanik bleiben, in dem Rahmen, in dem die Kurse des 11. Schuljahrs die Fallgesetze und den Wurf beschreiben.

Natürlich hängt die konkrete Beschreibung der Bewegung, also die Formel der Abbildung eines Zeitintervalls in den dreidimensionalen Raum, vom *Bezugssystem* ab und in ihm vom raumzeitlichen *Koordinatensystem*.

Sie bemerken, ich unterscheide zwischen *Bezugssystem* und *Koordinatensystem*; vielleicht sehen Sie keinen Unterschied zwischen ihnen. Ich meine, Sie können in einem und demselben Bezugssystem verschiedene Koordinatensysteme unterscheiden: Im Laborsystem können Sie zwischen cartesischen Koordinaten und Polarkoordinaten und noch anderen Koordinaten unterscheiden. Also ist ein Bezugssystem kein Koordinatensystem.

Frage: Was aber ist ein Bezugssystem?

Antwort: Ein *Bezugssystem* ist ein (realer oder gedachter) Bezugskörper in Verbindung mit einer (realen oder gedachten) Messapparatur samt Messtheorie, die – nach Wahl eines Koordinatensystems – jedem Ereignis ein Quadrupel dreier räumlicher Koordinaten und einer zeitlichen Koordinate zuordnet.

Vorschlag: Überlegen Sie sich für eine Höhenforschungsrakete im Bezugssystem der Erdoberfläche, wie jedem Ereignis ihrer Bewegung ein Koordinatenquadrupel zugeordnet werden könnte!

Lösung: Mehrere RADAR-Stationen messen die Laufzeiten der an der Rakete reflektierten Signale. Aus den Örtern der RADAR-Geräte und ihren Laufzeiten bestimmt ein Rechenprogramm zu jeder gewünschten Zeit des Aufstiegs und Falls der Rakete ihre *cartesischen Koordinaten* und *sphärischen Polarkoordinaten*.

Vorschläge: Führen Sie aus, in welchen *Bezugssystemen* wir die Bewegung von interstellaren Raketen berechnen sollten, damit sowohl die Bewegungsgleichungen als auch ihre Interpretation besonders einfach werden!

Und führen Sie aus, mit welchen Komplikationen wir fertig werden müssten, sollten wir so ehrgeizig sein, die Bewegung eines Raketenflugzeugs von Paris nach Sydney berechnen zu wollen!

Lösung: Um die Bewegung einer interstellaren Rakete zu berechnen, sollten wir ein Bezugssystem wählen, das im absoluten Raum ruht oder sich gegen den absoluten Raum geradlinig gleichförmig bewegt. Denn in jedem Bezugssystem, das sich gegen den absoluten Raum beschleunigt bewegt, treten *Scheinkräfte* neben den eingeprägten Kräften auf.

Wollten wir zum Beispiel die Bewegung einer Rakete im rotierenden Bezugssystem der Erde berechnen, so müssten wir außer dem Schub der Rakete (und dem Luftwiderstand und dem aerodynamischen Auftrieb) als Scheinkräfte die Fliehkraft und die Corioliskraft berücksichtigen.

Vorschlag: Zählen Sie Beispiele für Raketenbewegungen auf, die wir in dem Rahmen der *newtonschen* Mechanik nicht erfassen können!

Lösung: Die *newtonsche* Mechanik ist *nichtrelativistisch.* Raketenbewegungen mit relativistischen Geschwindigkeiten, das heißt Geschwindigkeiten, die der Lichtgeschwindigkeit nahekommen, können wir mit der newtonschen Mechanik nicht richtig wiedergeben. (Wenn uns viel daran läge, könnten wir sie in einem zweiten Anlauf erfassen: Ackeret hatte 1946, weniger als fünfzig Jahre nach Tsiolkovskys Publikation der nichtrelativistischen Raketenformel, die Grundgleichung der speziell-relativistischen Raketendynamik veröffentlicht [27].)

Auch die Schwere können wir hier nur im Rahmen *newtonscher* Mechanik berücksichtigen. Wären wir so ehrgeizig, die Bewegung einer Rakete im Sonnensystem so genau berechnen zu wollen, wie sich die Bewegung heute messend verfolgen ließe, so müssten wir schon allgemein-relativistisch rechnen (auch darum führen die aktuellen Lehrbücher der Himmelsmechanik in die Allgemeine Relativitätstheorie ein). Wir dürfen also nicht zuviel Genauigkeit von unseren Ergebnissen erwarten. Wollten wir auf der Grundlage der newtonschen Mechanik den Start einer Science-Fiction-Rakete von einem Neutronenstern berechnen oder ein Science-Fiction-Maneuver einer Rakete in der Nähe eines Schwarzen Lochs, so könnten die Ergebnisse nach den (newtonschen) Theorie von der Science-Fiction-Wirklichkeit um mehr als nur einige Prozent abweichen! (Wir werden damit leben müssen.)

Hinweise: Wir wollen hier nicht mehr als Schulmathematik voraussetzen (oder höchstens ein bisschen mehr). Darum können wir die Rotationen der Rakete nicht berücksichtigen. Wir behandeln also die Rakete wie einen Massenpunkt, und der Einfachheit halber wie einen Massenpunkt, der sich auf einer Geraden bewegt.

Dabei wollen wir so tun, als bestünde die aus den Düsen abgestrahlte Materie nicht aus *einzelnen* Molekülen, Atomen, Ionen und Elektronen, sondern statt dessen annehmen, ein kontinuierliches Medium strömte heraus. (Wie sich der Ausstoß *diskreter* Teilchen behandeln lässt, zeigt Harry O. Ruppe in seinem Hochschullehrbuch der Astronautik [28], pp. 22–25.)

3 Die Bewegungsgleichung der kräftefreien Rakete

Physikalische Themen: Der Abschnitt 3.1 ist grundlegend, in ihm leiten wir die Gleichung her, die wir in den Hauptabschnitten 4 und 7 lösen, um *Geschwindigkeit* und *Bewegung* einer kräftefreien Rakete zu berechnen: Zuerst berechnen wir den *Impuls* der kräftefreien Rakete zu den benachbarten Zeitpunkten t und $t + dt$. Über den *Impulssatz* leiten wir daraus eine Differentialgleichung für die *Geschwindigkeit* $v(t)$ der kräftefreien Rakete als Funktion der Zeit her, die zugleich eine Differentialgleichung für die *Bewegung* $x(t)$ der kräftefreien Rakete ist, d. h. ihre *Bewegungsgleichung*.

Im Abschnitt 3.2 leiten wir noch einmal die *Bewegungsgleichung* der kräftefreien Rakete her, diesmal aus anderen Voraussetzungen: aus dem zweiten und dritten der newtonschen *Gesetze*. Dazu führen wir den Begriff des *Schubs* der Rakete ein (die *Reaktionskraft* des Treibgases im *augenblicklichen Ruhsystem* der Rakete). Auf den Schub und auf dieses Bezugssystem müssen wir uns noch einmal im Abschnitt 5.2 besinnen, wenn wir dort die Frage erörtern, ob die Reaktionskraft der Treibgase auf die Rakete unter Umständen negativ sein kann.

Im Abschnitt 3.3 führen wir den Begriff der *effektiven* Strahlgeschwindigkeit ein. So können wir in den Hauptabschnitten 6 und 8 die zunächst nur für die Rakete im Vakuum hergeleitete Bewegungsgleichung auf die in einer Atmosphäre arbeitende Rakete übertragen.

Mathematische Anforderungen: *Äquivalenzumformungen* von Gleichungen (auch zwischen *Differentialen*), das Verständnis des Begriffs des *Differentialquotienten*.

Um unsere Überlegungen – und Rechnungen – zunächst so einfach wie nur irgend möglich zu halten, wollen wir hier annehmen, dass auf die Rakete keine äußere Kraft wirken soll: keine Schwerkraft, keine Luftreibung, nichts! Auch sehen wir vom Druck unserer Atmosphäre an den Austrittsöffnungen der Düsen ab, nehmen also an, der Druck wäre dort gleich null.

Diese vereinfachenden Annahmen treffen nicht auf die Rakete zu, die von der Erdoberfläche aus startet, aber wir können an eine Rakete im interstellaren Raum denken. Wir rechnen also, wie es Physiker – und Physikerinnen – gerne tun, zunächst nur mit einem *Spielzeugmodell* (toy model).

Ein zweites *Spielzeugmodell*, die Rakete im homogenen Schwerefeld, nehmen wir uns später vor [in den Hauptabschnitten 6, 8 und 9]. In dem Modell werden wir berücksichtigen, dass der Luftdruck die ausströmenden Treibgase verlangsamt, und darum mit einer *effektiven* Strahlgeschwindigkeit rechnen [definiert durch Gl. (6) im Abschnitt 3.3, siehe auch die konkrete Berechnung der effektiven Strahlgeschwindigkeit im Abschnitt 6.3].

Dem Ernstfall nahe wäre die Rakete im kugelsymmetrischen Schwerefeld eines Himmelskörpers: das Modell könnten Sie vielleicht im zweiten Studienjahr an einer Technischen Universität durchrechnen – oder im Selbststudium, indem Sie es (in Kugelkoordinaten) nach einem Hochschullehrbuch durcharbeiten [28]; wir müssen darauf verzichten.

3.1 Eine Differentialgleichung der Raketengeschwindigkeit als Funktion der Zeit, hergeleitet aus dem Impulssatz

Vorschläge: Wenden Sie den *Impulssatz* auf eine Rakete an: auf eine Rakete mit der zeitabhängigen Masse $M(t)$:

- Berechnen Sie zuerst den Impuls $p(t)$ der Rakete zur Zeit t (ohne die vorher von der Rakete ausgestoßenen Treibgase mitzurechnen).
- Berechnen Sie anschließend den Impuls $p(t+dt)$ desselben *Systems* zu einem Zeitpunkt $t+dt$ ganz kurz danach: die Rakete selbst ist zur Zeit $t+dt$ um den Betrag $|dM(t)|$ leichter geworden; aber zum *System* müssen wir auch noch die im Zeitintervall zwischen t und $t+dt$ ausgestoßene Treibgaswolke rechnen (nur so dürfen wir das System der Rakete – der Rakete samt ausgestoßener Wolke – wie ein *abgeschlossenes System* behandeln).
- Setzen Sie schließlich die beiden Impulse gleich und berechnen Sie aus dieser Gleichung den Differentialquotienten der Geschwindigkeit $v(t)$ nach der Zeit t. Die Differentialgleichung für die Geschwindigkeit der Rakete als Funktion der Zeit ist auch eine Differentialgleichung für den Ort der Rakete als Funktion der Zeit, ist die *Bewegungsgleichung* der Rakete.

Lösungen:

- Der Impuls der Rakete zur Zeit t ist gegeben durch die Ausdrücke

  $$p(t) = M(t)\cdot v(t) = [M(t+dt)+|dM(t)|]\cdot v(t) = [M(t+dt)+\mu(t)\cdot dt]\cdot v(t) \quad .$$

  Im letzten Ausdruck haben wir den wichtigen System-Parameter

  $$\mu := \frac{|\mathrm{d}M|}{\mathrm{d}t} = \left|\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\right|$$

  eingeführt, für ihn gilt wegen $|\mathrm{d}M| = -\mathrm{d}M$:

  $$\mu := -\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \quad . \tag{1}$$

  Er heißt *Massendurchsatz* oder kurz *Durchsatz* der Rakete (oder eines ihrer Motoren). □

- Der Impuls des Systems um die Zeit dt später erfüllt die Gleichung

  $$p(t+dt) = M(t+dt)\cdot v(t+dt) + \mu(t)\cdot dt\cdot[v(t)-c(t)] \quad ;$$

  dabei bedeutet $c(t)$ den Betrag der Ausströmgeschwindigkeit der Treibgase (bezogen auf die Rakete), den Betrag der *Strahlgeschwindigkeit.* □

- Weil keine äußere Kraft auf das System wirken soll, müssen die beiden Impulse gleich sein:

$$M(t+dt)\cdot v(t+dt)+\mu(t)\cdot dt\cdot v(t)-\mu(t)\cdot dt\cdot c(t) = M(t+dt)\cdot v(t)+\mu(t)\cdot dt\cdot v(t) \quad .$$

Wir substrahieren von beiden Seiten den Term $\mu(t) \cdot dt \cdot v(t)$ und erhalten die kürzere Gleichung:

$$M(t+dt) \cdot v(t+dt) - \mu(t) \cdot dt \cdot c(t) = M(t+dt) \cdot v(t) \quad .$$

Dividieren wir beide Seiten mit $M(t+dt)$, so erhalten wir die uns interessierende Geschwindigkeitsänderung:

$$v(t+dt) - \frac{c(t) \cdot \mu(t) \cdot dt}{M(t+dt)} = v(t) \quad ;$$

$$v(t+dt) - v(t) = \frac{c(t) \cdot \mu(t) \cdot dt}{M(t+dt)} \quad . \tag{2}$$

Noch stärker interessiert uns die Geschwindigkeitsänderung $[v(t+dt)-v(t)]$ im Verhältnis zur dabei vergangenen Zeit dt, der *Differenzenquotient* der Geschwindigkeit als Funktion der Zeit:

$$\frac{v(t+dt) - v(t)}{dt} = \frac{c(t) \cdot \mu(t)}{M(t+dt)} \quad .$$

Kennen Sie schon den Begriff des *Differentialquotienten* (als Grenzwert einer Folge von Differenzenquotienten), dann wissen Sie, was Sie noch zu tun haben: Sie betrachten beide Seiten der Gleichung im Grenzübergang gegen null strebender Zeitdifferenzen, kurz: für $dt \to 0$. So bekommen Sie eine Gleichung für den *Differentialquotienten* der Geschwindigkeit nach der Zeit, also für die Beschleunigung:

$$\boxed{\frac{dv(t)}{dt} = \frac{c(t) \cdot \mu(t)}{M(t)}} \quad . \tag{3}$$

Das ist die gesuchte Differentialgleichung für die Geschwindigkeit einer Rakete (auf die keine äußeren Kräfte wirken). Beachten Sie, dass nach ihrer Herleitung die Gleichung unabhängig davon gilt, ob Strahlgeschwindigkeit $c(t)$ und Durchsatz $\mu(t)$ echt variabel oder konstant sind! Die Gleichung können Sie auch als *Bewegungsgleichung* der Rakete schreiben:

$$\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{c(t) \cdot \mu(t)}{M(t)}} \quad . \quad \square \tag{4}$$

Wenn Sie, lieber Physik-Fan, zu den Leuten gehören, die den *Differentialquotienten* noch nicht kennengelernt haben – Sie haben aber bis hierher mitgelesen und mitgerechnet und wollen gerne das Bewegungsproblem lösen –, dann müssen Sie sich diesen Begriff zu eigen machen. („Was du ererbt von deinen Vätern hast, erwirb es, um es zu besitzen!") Das erfordert Anstrengungen, doch haben Sie es leichter als Newton und Leibniz, die den Begriff erst entwickeln mussten; Sie brauchen nur einen Abschnitt in einem guten Lehrbuch durchzuarbeiten.

Fragt sich nur, welches Buch für Sie das beste ist. Sehr gut für mich war ein Buch von Courant und Robbins [29] – ich lernte eine frühe Auflage als Student kennen –, der Begriff des *Differentialquotienten* wird darin auf den Seiten 315–329 erklärt. Welches Buch für Sie gut ist – wozu gehört, dass Ihnen das Arbeiten nach dem Buch auch *Spaß* macht –, müssen Sie selbst herausfinden: suchen Sie also in allen öffentlichen Bibliotheken mit naturwissenschaftlichen Abteilungen. Wenn Sie den Vorzug haben, noch zur Schule gehen zu dürfen, dann fangen sie natürlich in Ihrer Schulbibliothek an!

3.2 Noch eine Herleitung derselben Differentialgleichung, diesmal aus zwei newtonschen Gesetzen: Der Schub

Vorschlag: Definieren Sie den Begriff des *Schubs* einer Rakete!

Definition: Unter dem *Schub* einer Rakete verstehen wir die Kraft, mit der die ausströmenden Treibgase auf die Rakete wirken – im *augenblicklichen Ruhsystem* der Rakete (dieses Bezugssystem ist nicht gegen den absoluten Raum beschleunigt!).

Nach Newtons "Lex tertia", dem dritten der newtonschen *Grundgesetze*, gern verkürzt als Gleichung "actio gleich reactio", ist der Schub *entgegengesetzt* gleich der Kraft, mit der die Rakete die Treibgase *abstößt*: Beide Kräfte sind *innere* Kräfte des Systems (Rakete samt Treibgasen), und die Summe dieser beiden inneren Kräfte ist gleich null (wie überhaupt die Summe aller inneren Kräfte eines Systems gleich null ist).

Vorschlag: Deuten Sie Gl. (3) als eine Gleichung über den *Schub* der Rakete!

Lösung: Multiplizieren wir beide Seiten von Gl. (3) mit der aktuellen Masse $M(t)$, so erhalten wir eine Gleichung zwischen zwei Kräften:

$$\boxed{M(t) \cdot \frac{dv(t)}{dt} = c(t) \cdot \mu(t)} \quad . \tag{5}$$

• Auf der *linken Seite* von Gl. (5) steht die Gesamtkraft $F(t)$, die auf die Rakete in ihrem *augenblicklichen Ruhsystem* wirkt. Denn in diesem Bezugssystem ist die Impulsänderung der Rakete gleich dem Produkt ihrer Masse und ihrer Beschleunigung – obwohl ihre Masse von der Zeit abhängt:

$$F(t) = \frac{d}{dt}\Big(M(t) \cdot v(t)\Big) = \frac{dM(t)}{dt} \cdot v(t) + M(t) \cdot \frac{dv(t)}{dt} \quad ,$$

und weil im augenblicklichen Ruhsystem der Rakete zur Zeit t gilt: $v(t) = 0$, erhalten wir

$$F(t) = M(t) \cdot \frac{dv(t)}{dt} \quad .$$

• Und auf der *rechten Seite* von Gl. (5) steht die Impulsänderung des nach hinten ausgestoßenen Treibgases – mit umgekehrtem Vorzeichen: die Impulsänderung des Treibgases ist gleich $\frac{\mu(t)dt\cdot[-c(t)]}{dt} = -\mu(t) \cdot c(t)$, denn das Treibgas wird ja nach hinten ausgestoßen. Diese Impulsänderung des ausgestoßenen Treibgases ist – nach Newtons "Lex secunda" – gleich der Kraft, mit der die Rakete die Treibgase abstößt:

$$-\mu(t) \cdot c(t) = F_{\text{von der Rakete auf das Treibgas wirkend}} \quad .$$

Diese Kraft ist negativ: sie ist entgegengesetzt zu der auf die Rakete wirkenden Kraft $F(t)$ gerichtet. (Die Kraft $F(t)$ ist positiv wie der Geschwindigkeitszuwachs der Rakete.)

Und die *Reaktionskraft* F_{Reaktion}, mit der die Treibgase zurückstoßen, ist – nach Newtons "Lex tertia" – entgegengesetzt gleich der Kraft, die sie erfahren:

$$F_{\text{Reaktion}} = -F_{\text{von der Rakete auf das Treibgas wirkend}} \quad ;$$

also ist die Kraft $F(t)$ auf die Rakete gleich der Reaktionskraft F_{Reaktion} der Treibgase auf die Rakete:

$$F(t) = \mu(t) \cdot c(t) \quad .$$

Damit haben wir beide Ausdrücke in Gl. (5) als Formen einer und derselben Kraft erkannt, des Schubs der Rakete. □

3.3 Ein Ausblick: Die Bewegungsgleichung der Rakete in der Lufthülle

Nach unseren Herleitungen gilt Gl. (5) nur im Vakuum: nur wenn die ausströmenden Treibgase nicht gegen von außen wirkende Druckkräfte arbeiten müssen.

Es ist bequem, den Schub auch dann noch mit dieser Gleichung zu beschreiben, wenn die Rakete in der Erdatmosphäre betrieben wird (oder wenn Sie wollen, in einer anderen Planeten-Atmosphäre). Das können wir, wenn wir den darin vorkommenden Parameter $c(t)$ einfach durch diese Gleichung *definieren*. Die so definierte Größe heißt *effektive* Strahlgeschwindigkeit, und um sie von der Strahlgeschwindigkeit $c(t)$ im Vakuum zu unterscheiden, kürzen wir sie mit $c_{\text{eff}}(t)$ ab. Für Raketen, die in der Erdatmosphäre arbeiten, gilt also *per definitionem* (streng!) die Gleichung:

$$\boxed{c_{\text{eff}}(t) := \frac{F}{\mu(t)}} \quad . \tag{6}$$

Unter der *effektiven Strahlgeschwindigkeit* $c_{\text{eff}}(t)$ verstehen wir also den Quotienten aus der Raketenschubkraft $F(t)$ und dem Massendurchsatz $\mu(t)$.

Folglich gilt für Raketen, deren Treibgase beim Austritt einen Luftdruck überwinden müssen, anstelle von Gl. (5):

$$\boxed{M(t) \cdot \frac{dv(t)}{dt} = c_{\text{eff}} \cdot \mu(t)} \quad , \tag{7}$$

und anstelle von Gl. (3):

$$\boxed{\frac{dv(t)}{dt} = \frac{c_{\text{eff}} \cdot \mu(t)}{M(t)}} \quad . \tag{8}$$

4 Die Tsiolkovsky-Formel: Die Geschwindigkeit der kräftefreien Rakete (im Vakuum)

Physikalische Themen: Wir stellen eine Differentialgleichung für die *Masse* $M(t)$ der Rakete auf und lösen sie. Den gefundenen Term $M(t)$ setzen wir auf der rechten Seite der soeben hergeleiteten Differentialgleichung (3) ein und lösen auch diese Gleichung, unser Ergebnis ist die *Tsiolkovsky-Formel*.

Mathematische Anforderungen: Nacheinander lösen wir also zwei *Differentialgleichungen*: die erste ist ganz leicht (zum Angewöhnen), die zweite nur etwas schwieriger. Um die zweite Differentialgleichung zu vereinfachen, ersetzen (*substituieren*) wir die Variable t und lösen die Differentialgleichung durch einen *Ansatz* (durch Raten) – keine Angst, ich helfe Ihnen. Wir kommen mit den Mitteln der Differentialrechnung aus: mit der *Ableitung* des *natürlichen Logarithmus* eines *Funktionsterms*, der *Kettenregel* und der *Ableitung eines Polynoms*. – Lieber Physik-Fan, Sie brauchen hier also keine Integralrechnung zu kennen. Und Sie brauchen auch noch keine Differentialgleichung gelöst zu haben, das sollten Sie hier beim Durcharbeiten der Musterlösung lernen! Natürlich wird Ihnen das Lösen unserer zweiten Differentialgleichung leichter fallen, wenn Sie schon irgendwo $1/x$ nach x integriert hatten oder wenn Ihnen schon einmal eine Differentialgleichung vorgestellt wurde.

Gl. (3) fassen wir als *Differentialgleichung* für die Geschwindigkeit der Rakete auf: Diese Geschwindigkeit $v(t)$ wollen wir als Lösung von Gl. (3) bestimmen.

4.1 Eine einfache Differentialgleichung für die Raketenmasse als Funktion der Zeit – zum Angewöhnen

In Gl. (3) geht die zeitabhängige Masse $M(t)$ der Rakete ein. In vielen Fällen ist der Massendurchsatz $\mu(t)$ konstant (in den Fällen schreiben wir μ anstelle von $\mu(t)$) , zum Beispiel für eine Feststoffrakete mit konstanter Abbrandgeschwindigkeit, und die Raketenmasse ist eine gegebene lineare Funktion der Zeit:

$$M(t) = M_0 - \mu \cdot t \tag{9}$$

mit der Abbkürzung $M_0 := M(0)$.

Vorschlag: Zeigen Sie, dass Gl. (9) die Lösung einer Differentialgleichung für die Masse $M(t)$ einer Rakete ist, deren Massendurchsatz μ konstant ist und deren Masse zur Zeit $t = 0$ gleich M_0 ist!

Bitte versuchen Sie es zuerst allein, also ohne weiterzulesen. Sollte Ihnen auch nach einer Meditation über den Text des Vorschlags keine Differentialgleichung für die Raketenmasse eingefallen sein, bitte ich Sie, meine „Empfehlungen“ zu lesen.

Empfehlung: *Formalisieren* Sie die Aufgabe: Stellen Sie die gegebenen Größen, die gesuchte Größe und eine Gleichung zwischen der gesuchten Größe und den gegebenen Größen zusammen!

Gegeben sind die Systemparameter M_0 und μ.

Gesucht ist der Funktionsterm $M(t)$.

Empfehlung: Überlegen Sie noch einmal, welche Differentialgleichung den als Konstante μ gegebenen Durchsatz mit der gesuchten Masse $M(t)$ verknüpft!

Grundgleichung: Der Durchsatz μ ist nach Definition die negative Ableitung der Raketenmasse $M(t)$ nach der Zeit t, kurz:

$$\frac{dM(t)}{dt} = -\mu \quad , \tag{10}$$

wobei μ in unserem Fall konstant ist. (Die Aufstellung dieser Gleichung ist wohl der schwerste Schritt auf dem Wege zur Lösung des Problems. Manchmal hilft eine Formalisierung der Aufgabe, auf die Grundgleichung zu kommen.)

Lösung: Haben Sie Gl. (10) aufgestellt, so müsste Ihnen der lösende Ansatz fast von selbst zufliegen – natürlich nur, wenn Sie schon differenzieren können. Wir machen den *Ansatz* (d. h. wir erraten die Lösung):

$$M(t) = -\mu \cdot t + C \quad .$$

Verifikation (d. h. wir vergewissern uns, ob wir richtig geraten haben): Wir bilden die Ableitung von $M(t)$ nach t und freuen uns, dass der Ansatz tatsächlich die Differentialgleichung (10) löst.

Um die Konstante C zu bestimmen – sie heißt *Integrationskonstante* –, setzen wir $t = 0$ in unseren Lösungsansatz ein und erkennen, dass die Konstante C die Bedingung $M(0) = -\mu \cdot 0 + C$ erfüllen muss, also $C = M_0$, wenn $M(t)$ die Masse der Rakete beschreiben soll. Damit ist die Lösung eindeutig in Form von Gl. (9) gegeben,

$$\boxed{M(t) = M_0 - \mu \cdot t} \quad \text{, q. e. d.} \quad \square$$

4.2 Ein Vorintegral der Bewegungsgleichung – vorausgesetzt, Strahlgeschwindigkeit und Durchsatz sind konstant

Zum Titel: Nachdem wir den bislang unbekannten Massenterm $M(t)$ als Funktionsterm $M(t) = M_0 - \mu \cdot t$ bestimmt haben, können wir daran gehen, die Bewegungsgleichung (4) zu lösen. Jede Lösung einer Differentialgleichung heißt auch „Integral“ der Differentialgleichung, die Tätigkeit des Lösens heißt auch „integrieren“. Wir wollen also die Bewegungsgleichung (4) *integrieren.*

Diese Differentialgleichung (4) ist nicht so einfach, dass wir sie in einem einzigen Schritt integrieren können, oder fällt Ihnen auf Anhieb eine Lösung für den Term $x(t)$ der Bewegung ein? Gl. (4) ist ja eine Differentialgleichung *zweiter* Ordnung: in Gl. (4) ist die höchste Ableitung des gesuchten Funktionsterms die *zweite* Ableitung.

Wir können die gesuchte Bewegung auch als Teillösung eines Systems zweier Differentialgleichungen erster Ordnung auffassen. In unserm Fall, nachdem wir den Massenterm $M(t)$ für Raketen mit konstantem Massendurchsatz bestimmt und in Gl. (3) eingesetzt haben, ist es das Gleichungssystem

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{c \cdot \mu}{M_0 - \mu \cdot t} \quad ; \tag{11}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t) \quad . \tag{12}$$

Ein erster Schritt zur *Integration* dieses Gleichungssystems wäre die *Integration* von Gl. (11). Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (11) heißt darum ein „erstes Integral“ oder „Vorintegral“ des Gleichungssystems. Im vorliegenden Abschnitt 4.2 und im nächsten Abschnitt 4.3 wollen wir $v(t)$ konkret bestimmen, ein *Vorintegral* des Systems der Gleichungen (11) und (12) berechnen.

Hinweis: Um Gl. (11) zu lösen, müssen wir uns an die Ableitung des natürlichen Logarithmus erinnern:

$$\frac{d\ln(x)}{dx} = \frac{1}{x} \tag{13}$$

oder in der Schreibweise von Newton

$$[\ln(x)]' = \frac{1}{x} \quad .$$

Lassen Sie uns zuerst die Lösung der Differentialgleichung (11) für den einfachen Spezialfall einer konstanten Strahlgeschwindigkeit c und eines konstanten Massendurchsatzes μ suchen, und zwar schrittweise:

1. Vorschlag: Ersetzen Sie (*substituieren* Sie) in Gl. (11) den *dimensionslosen* Ausdruck $M(t)/M_0 = 1 - \mu \cdot t/M_0$ durch eine neue Variable τ!

Anregung zum Nachdenken: Bitte wundern Sie sich, warum die neue zeitartige Variable *dimensionslos* sein soll! Könnten wir nicht ebenso gut den Nenner von Gl. (11) durch die Substitution $M := M_0 - \mu \cdot t$ als neue Variable einführen? Auf die Frage kommen wir noch zurück [bei der Lösung des 2. Vorschlags].

Lösung zum 1. Vorschlag: Um die vorgeschlagene Substitution vorzubereiten, formen wir Gl. (11) um:

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{c \cdot \mu}{M_0} \cdot \frac{1}{1 - \mu \cdot t/M_0} \quad . \tag{14}$$

Und um die rechte Seite dieser Gleichung zu vereinfachen, *substituieren* wir:

$$\tau := 1 - \frac{\mu \cdot t}{M_0} \quad , \tag{15}$$

gleichbedeutend mit

$$t =: \frac{M_0}{\mu}(1 - \tau) \quad .$$

So können wir die rechte Seite (r. S.) von Gl. (14) etwas kürzer schreiben:

$$\text{r. S.} = \frac{c \cdot \mu}{M_0} \cdot \frac{1}{\tau} \quad .$$

Auf der linken Seite (l. S.) müssen wir natürlich die gleiche Substitution einsetzen. Der Funktionsterm $v(t)$ geht in einen Funktionsterm $w(\tau)$ der neuen Zeitvariablen τ über,

$$v(t) = v\left(\frac{M_0}{\mu}(1 - \tau) \right) =: w(\tau) \quad ,$$

und seine Ableitung nach der (alten) Zeitvarablen t erhalten wir über die Kettenregel:

$$\text{l. S.} = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{dw(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{dw(\tau)}{d\tau} \cdot \left(- \frac{\mu}{M_0} \right) \quad .$$

Die ganze Differentialgleichung nimmt also nach der Substitution eine neue Form an – und darauf kommt es uns an:

$$\frac{dw(\tau)}{d\tau} \cdot \left(- \frac{\mu}{M_0} \right) = \frac{c \cdot \mu}{M_0} \cdot \frac{1}{\tau} \quad .$$

Natürlich lassen wir die Gleichung so nicht stehen: Wir vereinfachen sie, indem wir ihre beide Seiten durch den gemeinsamen Faktor $(-\mu/M_0)$ teilen:

$$\frac{dw(\tau)}{d\tau} = -c \cdot \frac{1}{\tau} \quad .$$

Diese Gleichung ist doch etwas einfacher als die ursprüngliche Gleichung (14), die Mühe der Substitution hat sich also gelohnt! □

2. Vorschlag: Lösen Sie die letzte Gleichung und schreiben Sie die Lösung als Funktion der eigentlichen Zeitvariablen t!

Lösung zum 2. Vorschlag: Nach der Substitution liegt der nächste Schritt nahe (wenn uns Gl. (13) gewärtig ist):

$$w(\tau) = -c \cdot \ln(\tau) + C \quad .$$

Hinweis: Wer noch nicht viele Differentialgleichungen gelöst hat, sollte die letzte Gleichung als Ansatz verstehen und diesen Ansatz verifizieren, sollte also $[-c \cdot \ln(\tau) + C]$ nach τ differenzieren.

Frage: Sehen Sie nun, was uns passiert wäre, wenn wir die neue zeitartige Variable dimensionsbehaftet gewählt hätten, zum Beispiel $M := M_0 - \mu \cdot t$ anstatt des *dimensionslosen* Ausdrucks $M(t)/M_0 = 1 - \mu \cdot t/M_0$ substituiert hätten?

Antwort: Dann hätten wir vielleicht als Lösung der transformierten Differentialgleichung hingeschrieben: $u(M) = -c \cdot \mu \cdot \ln(M) + K$, und das hätten wir verwerfen müssen, denn $\ln(M)$ ist nicht definiert: Wie groß soll der Logarithmus von einem Kilogramm sein? (Der Logarithmus ist doch nur für dimensionslose Argumente definiert, als Umkehrung der Exponentialfunktion: $y = \exp(x) \Longleftrightarrow x = \ln(y)$, wobei die Variablen x und y dimensionslos sein müssen: dabei darf x beliebig reell und y nur positiv reell sein.)

Fortsetzung der Lösung zum 2. Vorschlag: Wir brauchen nur noch die Substitution (15) rückgängig zu machen und die Integrationskonstante C zu bestimmen, um die gesuchte Raketengeschwindigkeit als Funktion der Zeit t zu erhalten:

$$v(t) = -c \cdot \ln\left(1 - \frac{\mu \cdot t}{M_0}\right) + C \quad .$$

Setzen wir hier $t = 0$ ein, erhalten wir $v(0) = -c \cdot \ln(1) + C$, also $0 = 0 + C$, und damit

$$\boxed{v(t) = -c \cdot \ln\left(1 - \frac{\mu \cdot t}{M_0}\right)} \tag{16}$$

für eine Rakete, auf die keine äußere Kraft wirkt und die zur Zeit null ihren Schub anwirft.

3. Vorschlag: Schreiben Sie die letzte Gleichung so um, dass erkennbar wird, was das Argument des Logarithmus darin bedeutet! (Die Gleichung gewinnt dadurch an Kürze.)

Lösung zum 3. Vorschlag: Wir machen uns das Argument des Logarithmus anschaulich, indem wir es auf einen Nenner bringen:

$$v(t) = -c \cdot \ln\left(\frac{M_0 - \mu \cdot t}{M_0}\right) \quad .$$

Im Zähler des Bruchs erkennen wir die Masse zur Zeit t, siehe Gl. (9), es gilt also

$$v(t) = -c \cdot \ln\left(\frac{M(t)}{M_0}\right)$$

oder nach einer Logarithmenregel:

$$\boxed{v(t) = c \cdot \ln\left(\frac{M_0}{M(t)}\right)} \quad . \tag{17}$$

Das Argument des Logarithmus in der letzten Gleichung ist also das Verhältnis der Startmasse M_0 zur aktuellen Masse $M(t)$.

Diese Gleichung ist die *Raketengrundgleichung* der kräftefreien Rakete. Das ist die Gleichung, die Tsiolkovsky 1903 veröffentlicht hatte, vor fast hundert Jahren, sie heißt auch Tsiolkovsky-Formel (oder Tsiolkovsky-Gleichung). □

Überleitung zum Abschnitt 4.3: Wir haben Gl. (17) unter Voraussetzung konstanter Strahlgeschwindigkeit c und konstanten Massendurchsatzes μ hergeleitet. Wundern Sie sich nicht auch, dass der Massendurchsatz μ nicht explizit in der Formel zu sehen ist? Er geht nur implizit, nur über den Massenterm $M(t)$ in Gl. (17) ein!

Der Durchsatz ist nicht immer konstant: Manchmal werden die Motoren von Flüssigkeitsraketen gedrosselt; und manche Feststoffraketen sind so konstruiert, dass ihr Schub kurzzeitig besonders hoch ist (siehe[1], S. 81f.; siehe auch [25], S. 9, 501f.). Sicher fragen Sie sich, ob die Tsiolkovsky-Formel auch in diesen Fällen gilt. Das wollen wir im nächsten Abschnitt klären.

4.3 Ein Vorintegral der Bewegungsgleichung – nur vorausgesetzt, die Strahlgeschwindigkeit ist konstant

1. Vorschlag: Leiten Sie anstelle von Gl. (3), einer Differentialgleichung für die Raketengeschwindigkeit als Funktion der Zeit t, eine Differentialgleichung für die Raketengeschwindigkeit als Funktion der Masse M oder besser noch als Funktion des Massenverhältnisses M/M_0 her!

Empfehlung: Kürzen Sie das Massenverhältnis mit einem Buchstaben ab, am besten (wie ich meine) mit der griechischen Entsprechung τ zu der Variablen t, die wir in den Gleichungen ersetzen wollen; setzen Sie also

$$\tau := \frac{M}{M_0} \quad .$$

(Diese Substitution entspricht übrigens genau der Substitution (15) des letzten Abschnitts 4.2.)

Lösung zum 1. Vorschlag: Die Raketengeschwindigkeit v fassen wir als Funktion des Massenverhältnisses τ auf, kurz:

$$v = w(\tau) \quad ;$$

oder in einer etwas ausführlicheren Formelzeile:

$$w: \quad \tau \mapsto v = w(\tau) \quad \text{für} \quad \tau \in [0;1] \quad .$$

Wir berufen uns auf Gl. (2), ein Zwischenergebnis auf dem Wege zur Differentialgleichung (3), in dem wir $\mu \cdot dt$ durch $-dM(t)$ ersetzen:

$$v(t+dt) - v(t) = -\frac{c}{M(t+dt)} \cdot dM(t) \quad ,$$

um von Funktionen der Zeit t zuerst zu Funktionen der Masse M und letztlich zu Funktionen des Massenverhältnisses τ überzugehen.

Diese Gleichung besteht aus Termen mit der unabhängigen Variablen t. Wir wollen zunächst zur entsprechenden Gleichung zwischen den entsprechenden Termen mit der unabhängigen Variablen M übergehen. Wir setzen $v(t) = f(M)$ und $v(t+dt) = f(M+dM)$ und erhalten:

$$f(M+dM) - f(M) = -\frac{c}{M+dM} \cdot dM \quad .$$

Um die Entsprechungen durchzuhalten, müssen wir beachten, dass dM negativ ist: Zum positiven Zeitelement dt gehört das negative Massenelement dM.

Nun wechseln wir von den Termen, die von der Masse M abhängen, zu den entsprechenden Termen, die vom Massenverhältnis $\tau := M/M_0$ abhängen. Wir setzen: $f(M) = w(\tau)$ und $f(M+dM) = w(\tau + d\tau)$ und erhalten

$$w(\tau + d\tau) - w(\tau) = -c \cdot \frac{1}{M+dM} \cdot dM \quad ;$$

$$w(\tau + d\tau) - w(\tau) = -c \cdot \frac{M_0}{M+dM} \cdot \frac{dM}{M_0} \quad ;$$

$$w(\tau + d\tau) - w(\tau) = -c \cdot \frac{1}{\tau + d\tau} \cdot d\tau \quad .$$

Wir dividieren beide Seiten mit $d\tau$ und bekommen

$$\frac{w(\tau + d\tau) - w(\tau)}{d\tau} = -c \cdot \frac{1}{\tau + d\tau} \quad .$$

Im Grenzübergang $d\tau \to 0$ erhalten wir die gesuchte Differentialgleichung für die Geschwindigkeit $v = w(\tau)$ als Funktion des Massenverhältnisses τ:

$$\boxed{\frac{dw(\tau)}{d\tau} = -\frac{c}{\tau}} \quad . \quad \square$$

2. Vorschlag: Lösen sie diese Differentialgleichung durch einen Ansatz!

Lösung zum 2. Vorschlag: Die Gleichung kommt uns bekannt vor, ihre Lösung kennen wir inzwischen, also setzen wir an:

$$w(\tau) = -c \cdot \ln(\tau) + C \quad .$$

Die Integrationskonstante C bestimmen wir in diesem Fall nicht aus einer *Anfangsbedingung*, denn von Zeitabhängigkeit ist hier nicht die Rede; diesmal nutzen wir eine *Randbedingung*. Der *Anfangsbedingung* $v(0) = 0$ entspricht die *Randbedingung* $w(1) = 0$, und setzen wir $\tau = 1$ (entsprechend zu $t = 0$) in die allgemeine Lösung ein, so erhalten wir $w(1) = 0 = -c \cdot \ln(1) + C$, also $C = 0$, und damit lautet die spezielle Lösung zu unserer Randbedingung:

$$w(\tau) = -c \cdot \ln(\tau) \quad .$$

Zum Schluss setzen wir ein, was die Abkürzung τ bedeutet,

$$w\left(\frac{M}{M_0}\right) = -c \cdot \ln\left(\frac{M}{M_0}\right) \quad ,$$

und beseitigen das Minuszeichen:

$$\boxed{w\left(\frac{M}{M_0}\right) = c \cdot \ln\left(\frac{M_0}{M}\right)} \quad . \tag{18}$$

Kommentar: Also gilt die Tsiolkovsky-Formel auch dann, wenn der Durchsatz wild schwankt.

5 Ein Bibliotheksbesuch: Die Bewegungsgleichung in zwei Bezugssystemen

Lieber Physik-Fan, haben Sie bis hierher mitgearbeitet, dann könnten Sie an einem ruhigen Nachmittag in den Lesesaal einer Universitätsbibliothek oder Staatsbibliothek gehen und dort alle Bücher, die Ihnen gefallen, auf das Stichwort *Rakete* durchblättern. Oder Sie nehmen sich gezielt eines der Bücher vor, in denen ich auf der Suche nach diesem Stichwort oder dem Stichwort *Raumschiff* fündig geworden bin, siehe [31]–[59]. In den Hochschullehrbüchern sollten Sie inzwischen die Herleitung der Bewegungsgleichung der Rakete nachvollziehen können – bei der Herleitung wird noch keine Integralrechnung vorausgesetzt!

5.1 Die Raketengeschwindigkeit als gebrochene rationale Funktion der Zeit?

Ich lese gern in Flügges Büchern und besitze etliche von ihnen, darunter die *Elementare Mechanik und Kontinuumsphysik*. Im Aufgabenanhang des Buchs fand ich eine vorgerechnete Aufgabe zur Raketenbewegung. Ich zitiere Flügges Lösung, lasse nur den letzten, kommentierenden Satz weg [58]:

„**Lösung.** In der Zeit dt wird die Masse $\mu\,dt$ mit der Geschwindigkeit u ausgestoßen, d. h. an Impuls gewinnt die Rakete während dieser Zeit den Betrag $\mu\,u\,dt$. Gleichzeitig geht ihr infolge der Schwerkraft in der Zeiteinheit an Impuls der Betrag $m\,g$ verloren. Daher lautet die Bewegungsgleichung

$$\frac{dp}{dt} = \mu\,u - m\,g.$$

In dieser Gleichung ist

$$p = m\,v$$

der jeweilige Impuls der Rakete, welche die Geschwindigkeit v erreicht hat und deren Masse auf

$$m = m_0 - \mu\,t$$

gesunken ist. Daher wird

$$\frac{d}{dt}\,(m\,v) = \mu\,u - m_0\,g + \mu g t\,;$$

mithin

$$m\,v = (\mu\,u - m_0\,g)\,t + \frac{\mu g}{2} t^2 + m_0\,v_0\,,$$

wenn wir mit v_0 die Anfangsgeschwindigkeit bezeichnen. Die Geschwindigkeit der Rakete zur Zeit t nach dem Abschuß ergibt sich also zu

$$v = \frac{m_0\,v_0 + (\mu\,u - m_0\,g)\,t + \frac{1}{2}\,\mu g t^2}{m_0 - \mu\,t}\ .\text{“}$$

Ende des Zitats.

Vorschlag: Vergleichen Sie Flügges Ergebnis für die Raketengeschwindigkeit v mit unserem nach Gl. (16) und erklären Sie den Unterschied!

Wir hatten mit Gl. (16) die Geschwindigkeit einer Rakete beschrieben, auf die nur ihr Schub wirkt, also keine Schwerkraft (die Geschwindigkeit einer gegen die Schwerkraft startenden Rakete wollen wir erst im Hauptabschnitt 8 behandeln). Um Flügges Ausdruck für die Raketengeschwindigkeit mit unserem vergleichen zu können, brauchen Sie nur in Flügges Ergebnis die Erdbeschleunigung g gleich null zu setzen. Tun Sie das also, vergleichen Sie die beiden Formeln und nehmen Sie Stellung!

Die Aufgabe ist schwerer, als sie auf den ersten Blick aussieht. Bitte bemühen Sie sich, sie zu lösen: nehmen Sie sich ein paar Tage Zeit, falls Sie nicht in ein paar Stunden durchblicken. Sie stellen dabei fest, ob Sie über der Theorie stehen oder nur mitten in ihr. Aber bitte, versuchen sie es zuerst selbst, bevor Sie meine Lösung lesen!

Lösung: In Flügges sechste Formelzeile setzen wir $g = 0$ und $v_0 = 0$ ein und erhalten (in unseren Bezeichnungen)

$$v(t) = c\,\frac{\mu\,t}{M_0 - \mu\,t} \quad .$$

Nach Flügge wäre also die Raketengeschwindigkeit eine *gebrochene rationale* Funktion der Zeit (übrigens auch die Geschwindigkeit der Rakete im Schwerefeld, für $g \neq 0$). Aber unsere Gl. (16) beschreibt eine *transzendente* Funktion der Zeit. Diesen Widerspruch müssen wir klären!

Die erste von Flügges Formelzeilen (eine Differentialgleichung für den Impuls als Funktion der Zeit) ist äquivalent mit seiner vierten Formelzeile (noch einmal eine Differentialgleichung für den Impuls als Funktion der Zeit). Und der von Flügge in seiner fünften Formelzeile angegebene Impuls löst diese Differentialgleichung korrekt. Aber in Flügges erster Formelzeile steckt ein Fehler.

Die rechte Seite dieser Gleichung begründet Flügge so: „an Impuls gewinnt die Rakete während dieser Zeit den Betrag $\mu\,u\,dt$“. Diese Begründung stimmt nur in einem Bezugssystem, in dem die Raketengeschwindigkeit gleich null ist: gleich null für alle Zeiten des Raketenbetriebs. Die Begründung stimmt im *Ruhsystem* der beschleunigt aufsteigenden Rakete (in dem Bezugssystem ist die Raketengeschwindigkeit jederzeit gleich null, das Bezugssystem ist gegen den absoluten Raum beschleunigt). Und sie stimmt in einer Aufeinanderfolge von unendlich vielen Bezugssystemen, die gegen den absoluten Raum nicht beschleunigt sind und in denen die Geschwindigkeit jeweils nur zu einer Zeit t verschwindet: in einer Aufeinanderfolge von unendlich vielen *augenblicklichen Ruhsystemen* der Rakete, also für jede Zeit t in einem eigenen Ruhsystem. (Mit einem System von *jeweiligen Ruhsystemen* könnten Sie auch relativistische Beschleunigungen von Raketen berechnen, siehe z. B. [60], S. 162.)

Um die Bewegungsgleichung der Rakete aufzustellen, müssen wir aber in der einen wie der anderen Wahl des Bezugssystems zunächst die Bewegungsgleichung der Rakete in einem Bezugssystem aufstellen, das nicht gegen den absoluten Raum beschleunigt ist, und das ist (in unseren Bezeichnungen) für $g = 0$ die Gleichung

$$\frac{dp(t)}{dt} = \mu \cdot [c - v(t)] \quad . \tag{19}$$

Denn in einem gegen den absoluten Raum unbeschleunigten Bezugssystem gilt: „an Impuls gewinnt die Rakete während dieser Zeit die Größe $\mu \cdot [c - v(t)]\,dt$“, in diesem Bezugssystem strömen in der Zeit dt Treibgase der Masse μdt mit der Geschwindigkeit $v(t) - c$ aus der Rakete und nehmen dabei den Impuls $\mu dt \cdot [v(t) - c]$ mit.

Im Ruhsystem der beschleunigt aufsteigenden Rakete ist die Summe der äußeren Kräfte (das ist hier der Term $\mu \cdot [c - v(t)]\, dt$“) und der Trägheitskraft, d. h. gleich der negativen Impuländerung, gleich null (siehe z. B. [59], S. ???), also

$$\mu \cdot [c - v(t)] - \frac{dp(t)}{dt} = 0 \quad .$$

Dieses Bezugssystem können wir nicht gebrauchen, denn in dem Bezugssystem erfahren wir nur etwas, das wir schon wissen, nämlich dass die Geschwindigkeit der Rakete in ihrem Ruhsystem gleich null ist.

Besser geeignet ist das System der *augenblicklichen* Ruhsysteme der Rakete. Die Bewegungsgleichung der Rakete im momentanen Ruhsystem der Rakete zur Zeit t erhalten wir nach Gl. (19), indem wir zu beiden Seiten der Gleichung den Term $\mu \cdot v(t)$ addieren:

$$\frac{dp(t)}{dt} + \mu \cdot v(t) = \mu \cdot c \quad .$$

Wir erinnern uns, dass der Durchsatz als negative Massenänderung definiert ist, $\mu := -\frac{dM(t)}{dt}$, und erhalten:

$$\frac{dp(t)}{dt} - \frac{dM(t)}{dt} \cdot v(t) = \mu \cdot c \quad ,$$

also wegen $p(t) := M(t) \cdot v(t)$,

$$M(t) \cdot \frac{dv(t)}{dt} = \mu \cdot c \quad .$$

In dieser Gleichung erkennen wir Gl. (5) wieder. Wenn wir also in Flügges erster Formelzeile den Term $\mu \cdot u$ durch den Term $\mu \cdot [u - v(t)]$ ersetzen, erhalten wir die Differentialgleichung (16) für die Raketengeschwindigkeit und am Ende Tsiolkovskys Lösung. □

5.2 Ein negativer Schub?

Helmut Volz stellt die Anwendung von Newtons *Lex secunda* für die Rakete in Frage. Im Band I seiner „Einführung in die Theoretische Mechanik“ [50] leitet er zunächst die „Bewegungsgleichung der Rakete“ [im Vakuum] her „für den Fall, daß keine äußeren Kräfte vorhanden sind“:

$$„M\dot{v} = \mu c“ \quad .$$

[$\dot{v}$ ist eine schon von Newton eingeführte Abkürzung für die Ableitung von v nach der Zeit t; wir hatten bisher nur die Leibnizsche Schreibweise $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ dafür gebraucht. Es gilt also die Identität $\dot{v} \equiv \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ (zwei Schreibweisen für dieselbe Funktion), und die Gleichung $M\dot{v} = \mu c$ ist mit unserer Gl. (5) identisch.]

Ich zitiere Volz wörtlich [50]: ... „Wenn wir die Beziehung $\dot{M}v = -\mu v$ zu der Gleichung addieren, können wir diese schreiben

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Mv) = \mu(c - v).\text{“} \tag{20}$$

[Die Beziehung $\dot{M}v = -\mu v$ erhalten wir aus der Definitionsgleichung (1) des Durchsatzes, indem wir beide Seiten dieser Gleichung mit der Geschwindigkeit v multiplizieren.] Danach meint Volz:

„Die Annahme, man habe bei veränderlicher Masse in die Bewegungsgleichung den linken Ausdruck einzusetzen, führt dann zu der merkwürdigen Aussage, daß die rechte Seite, also die zugehörige ‚Kraft‘, bei großen Geschwindigkeiten der Rakete negativ wird. Eine solche Aussage ist nicht sinnvoll.“

Empfehlung: Um die letzte Behauptung für einen besonders einfachen Fall zu diskutieren, wollen wir annehmen, der Massendurchsatz μ und die Strahlgeschwindigkeit c wären konstant.

Vorschlag: Untersuchen Sie zunächst nur, ob Gl. (20) *mathematisch* sinnvoll ist!

Hinweis: Wenn der Durchsatz konstant ist, dann ist die Masse eine lineare Funktion der Zeit, konkret eine Funktion M mit dem Funktionsterm:

$$M(t) = M_0 - \mu \cdot t$$

[siehe Gl. (9) in Abschnitt 4.1], wobei wir abbkürzen: $M_0 := M(0)$.

Lösung: Auf der linken Seite der Gl. (20) steht also die Ableitung des Produkts der gegebenen linearen Funktion M und der noch zu bestimmenden Funktion v nach der Zeit t. Die Ableitung ist definiert für alle Zeiten t, zu denen eine differenzierbare Lösung v der Gl. (20) existiert.

Und auf der rechten Seite der Gl. (20) steht eine gegebene lineare Funktion mit der noch zu bestimmenden Funktion v. Die Funktion ist wohldefiniert für alle Zeiten t, zu denen die differenzierbare Funktion v existiert.

Gl. (20) ist eine *lineare* Differentialgleichung erster Ordnung für die Funktion v (für eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung existiert eine Lösung und ist durch den Anfangswert $v(0)$ der Geschwindigkeit eindeutig gegeben). Sie hat also einen wohldefinierten mathematischen Sinn für alle Zeiten, zu denen die Rakete arbeitet: für alle Zeiten t zwischen dem Zeitpunkt $t = 0$ des Starts der Rakete und dem Zeitpunkt $t = t_1$ ihres Brennschlusses, also für alle Zeiten t des endlichen Intervalls $[0; t_1]$. □

Vorschlag: Untersuchen Sie nun, ob Gl. (20) *physikalisch* sinnvoll ist!

Lösung: Wie wir eben festgestellt haben, ist Gl. (20) eine Differentialgleichung 1. Ordnung für die Funktion v, die Geschwindigkeit der Rakete. Die Lösung der Differentialgleichung (die Geschwindigkeit als bestimmte Funktion der Zeit) gibt uns nach Definition der augenblicklichen Geschwindigkeit eine Differentialgleichung 1. Ordnung zur Bestimmung des Orts der Rakete als Funktion der Zeit, nämlich die Gleichung $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} =: v$ oder kürzer $\dot{x} =: v$. Also ist Gl. (20) auch eine Differentialgleichung 2. Ordnung für die Bewegung, eine *Bewegungsgleichung*, und hat einen wohldefinierten physikalischen Sinn. □

Vorschlag: Untersuchen Sie, ob der Term auf der rechten Seite von Gl. (20), die „Kraft" auf die Rakete, irgendwann negative Werte annehmen kann!

Hinweis: Aus dem Schlussergebnis von Abschnitt 4.2, aus Gl. (17), können Sie schließen: Wenn die Rakete beim Start genügend Treibstoff an Bord hatte, erreicht ihre Geschwindigkeit irgendwann (sagen wir zur Zeit t_c) den Betrag c der Strahlgeschwindigkeit. Konkret gilt $M_0/M(t_c) = \mathrm{e}$, wobei e die berühmte Eulersche Zahl bedeutet, also $M(t_c) = M_0/\mathrm{e}$.

Lösung: Die Geschwindigkeit v wächst im Zeitintervall $[0; t_1]$ des Raketenbetriebs streng monoton an, also fällt die Funktion $\mu \cdot (c - v)$ in dem Zeitintervall streng monoton ab. Zur Zeit $t = 0$ ist die „Kraft" $\mu \cdot c$ positiv. Erreicht die Raketengeschwindigkeit zur Zeit $t = t_c$ den Wert der Strahlgeschwindigkeit c, dann gilt $\mu \cdot [c - v(t_c)] = 0$, und der Term auf der rechten Seite von Gl. (20), die „Kraft", ist auf den Wert 0 abgefallen.

Und hat die Rakete zur Zeit $t = t_c$ noch Treibstoff in ihren Tanks, wird ihre Geschwindigkeit $v(t)$ danach die Strahlgeschwindigkeit c übertreffen: für $t > t_c$ wird die „Kraft" negativ!

Wir können also nachvollziehen, was Volz „merkwürdig" nennt: „daß die rechte Seite [von Gl. (20)], also die zugehörige ‚Kraft', bei großen Geschwindigkeiten der Rakete negativ wird". □

Vorschlag einer Zwischenrechnung: Schätzen Sie ab – unter Vernachlässigung der Verluste durch Luftwiderstand und Gravitation –, wieviel Treibstoff Sie der Rakete am Anfang mindestens mitgeben müssten, um eine negative „Kraft" zu erreichen! Und versuchen Sie zunächst, die Zwischenrechnung ohne den folgenden Hinweis zu lösen – Sie lernen dabei die Tsiolkovsky-Gleichung besser kennen.

Hinweis zur Zwischenrechnung: Die Massendifferenz $M_0 - M(t_c)$ ist die Masse des Treibstoffs, den die Rakete bis zur Zeit t_c verbraucht hat.

Lösung der Zwischenrechnung: $M_{\text{Treibstoff}}(0) > (1 - \frac{1}{\mathrm{e}}) \cdot M_0 \approx 0,63 \cdot M_0$. □

Vorschlag: Bevor wir uns den Kopf über Sinn oder Unsinn einer negativen Schubkraft zerbrechen, sollten wir die Begriffe abklären, auf die wir uns in der Diskussion stützen müssen – um die physikalische Grundlage der Gl. (20) zu sichern. Wiederholen Sie also:

- die Definition des Schubs der Rakete,

- die newtonsche Bewegungsgleichung für eine Rakete veränderlicher Masse,
- die Erklärung der Bezugssysteme, in denen wir die Bewegung der Rakete beschreiben können.

Lösung:

- Weil in unserer Betrachtung keine äußeren Kräfte auf die Rakete wirken sollen, ist die Gesamtkraft auf die Rakete gleich der Schubkraft, gleich der Reaktionskraft der Treibgase auf die Rakete [siehe unseren Abschnitt 3.2].
- Für einen Körper veränderlicher Masse gilt die Bewegungsgleichung in der Form, die ihr Newton gegeben hat (*Lex secunda*): Die Gesamtkraft (als Funktion der Zeit) auf den Körper ist gleich der Impulsrate, der zeitlichen Ableitung des Impulses (als Funktion der Zeit), kurz

  $$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \quad .$$

  Nach Newton ist also die zeitliche Ableitung des Raketenimpulses gleich der Schubkraft, gleich der Reaktionskraft der Treibgase auf die Rakete. Dabei ist der Impuls (als Funktion der Zeit) eines Körpers nach Definition das Produkt seiner Masse (als Funktion der Zeit) und seiner Geschwindigkeit (als Funktion der Zeit), kurz:

  $$p := M \cdot v \quad .$$

  Daraus ergibt sich die zeitliche Ableitung des Impulses:

  $$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \;=\; M \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \;+\; \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \cdot v \quad .$$

- Zwei Bezugssysteme bieten sich an: erstens das Ruhsystem der Rakete und zweitens das Ruhsystem eines (unbeschleunigten) Beobachters, der außerhalb der Rakete deren Bewegung messend verfolgt, und zwar in einem Bezugssystem, in dem die Rakete zum Zeitpunkt ihres Starts ruhte (das Ruhsystem der Erde, das „Laborsystem“, dürfen wir nur wählen, wenn wir deren Gravitation und beschleunigte Bewegung wegdenken – damit wir keine Erdschwere und keine Scheinkräfte zu berücksichtigen brauchen).

Vorschlag: Interpretieren Sie die „Kräfte“ auf den rechten Seiten der beiden Bewegungsgleichungen (5) und (20) – um ein Gefühl für die Vorzeichen dieser „Kräfte“ zu gewinnen.

Lösung: Die erste Form der Bewegungsgleichung der Rakete,

$$M\,\dot{v} = \mu \cdot c \quad ,$$

ist die newtonsche Bewegungsgleichung der Rakete, beschrieben im Ruhsystem der Rakete (in dem die Raketengeschwindigkeit v zu jeder Zeit gleich null ist und in dem die Treibgase mit der Geschwindigkeit $-c$ aus der Rakete strömen). Auf der rechten Seite der Gleichung steht die Kraft, mit der die Treibgase auf die Rakete zurückwirken: der Schub $\mu \cdot c$ der Treibgase, beschrieben im Ruhsystem der Rakete [siehe unseren Abschnitt 3.2].

Die zweite, ihr äquivalente Form,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Mv) = \mu(c - v) \quad ,$$

ist die newtonsche Bewegungsgleichung der Rakete, beschrieben im Ruhsystem eines unbeschleunigten äußeren Beobachters: In diesem Bezugssystem haben die Treibgase die Geschwindigkeit $v - c$, wenn sie die Rakete verlassen. In der Zeit dt nehmen die Treibgase also den Impuls $(\mu dt) \cdot (v - c)$ aus der Rakete mit. Die Impulsänderung der Rakete in dieser Zeit beträgt also $(\mu dt) \cdot (c - v)$. Die zugehörige Kraft, der Quotient aus Impulsänderung $(\mu dt) \cdot (c - v)$ und Zeitänderung dt, steht auf der rechten Seite der Gleichung: es ist die Kraft, mit der die Treibgase auf die Rakete zurückwirken: In diesem Bezugssystem ist es also die Kraft $\mu \cdot (c - v)$.

Im Bezugssystem des äußeren Beobachters ist die Änderung des Raketenimpulses bestimmt durch die Geschwindigkeits-Änderung (das Glied $M \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$) und durch die Massen-Änderung (das Glied $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \cdot v$). Das erste Glied ist positiv (weil die Raketengeschwindigkeit zunimmt), das zweite negativ (weil die Raketenmasse abnimmt).

Wenn der Betrag des zweiten Gliedes größer als der Betrag des ersten ist, nimmt der Raketen-Impuls mit der Zeit ab. In dem Fall bewirkt die Kraft $\mu \cdot (c - v)$, dass der Impuls der Rakete abnimmt: in dem Fall ist die Kraft *negativ*. Weil $M \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \mu \cdot c$ nach Gl. (5) und $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \cdot v = -\mu \cdot v$ nach Definition des Durchsatzes, ist die Kraft auf die Rakete genau dann negativ, wenn die Geschwindigkeit v der Rakete größer ist als der Betrag c der Strahlgeschwindigkeit.

Vorschlag: Diskutieren Sie nun die Behauptung von Helmut Volz, die Aussage, die „Kraft" $\mu \cdot (c - v)$ könnte bei großen Geschwindigkeiten negativ werden, wäre „nicht sinnvoll"! Beschreiben Sie dazu im Bezugssystem des unbeschleunigten Beobachters außerhalb der Rakete, welchen Impuls das ausströmende Treibgas in der Zeit dt der Rakete entzieht, indem Sie von der Reaktionskraft $\mu \cdot (c - v)$ der Treibgase auf die Rakete ausgehen.

Lösung: Der unbeschleunigte Beobachter außerhalb der Rakete schließt aus Newtons *Lex secunda* auf die Impulsänderung $dp = F \cdot dt$, konkret auf

$$dp = \mu \cdot (c - v) \cdot dt \quad .$$

Solange die Geschwindigkeit v der Rakete kleiner als der Betrag c ihrer Strahlgeschwindigkeit ist, *gewinnt* die Rakete in der Zeit dt den Impuls $\mu \cdot (c - v) \cdot dt$.

Aber sobald ihre Geschwindigkeit v den Betrag c der Strahlgeschwindigkeit übersteigt, *verliert* die Rakete in der Zeit dt an Impuls: die Impulsänderung $\mu \cdot (c - v) \cdot dt$ ist dann negativ – im Ruhsystem des äußeren Beobachters. (Dann entzieht das in der Zeit dt austretende Treibgas der Rakete den Impuls $\mu \cdot (v - c) \cdot dt$ – im Bezugssystem des äußeren Beobachters.)

In diesem Fall wirkt sich für die Rakete der Massenverlust stärker aus als der Geschwindigkeitsgewinn. Dass – im Ruhsystem des äußeren unbeschleunigten Beobachters – die Rakete fortwährend Impuls verliert, wenn ihre Geschwindigkeit den Betrag der Strahlgeschwindigkeit übertrifft, ist eine sinnvolle und wahre Aussage.

Vorschlag: Vergleichen Sie, um eine Anschauung der negativen Kraft $\mu \cdot (c - v)$ zu gewinnen, im Ruhsystem des äußeren unbeschleunigten Beobachters die Reaktionskraft des Treibgases aus einer hypothetischen vorwärts gerichteten Korrekturdüse mit der Reaktionskraft der Treibgase aus den rückwärts gerichteten Antriebsdüsen der Rakete!

Lösung: Wenn die Treibgase nicht nach hinten, sondern nach vorn ausgestrahlt würden, dann wäre eine negative Kraft der Treibgase anschaulich klar – schon ohne jede Rechnung. Lassen Sie uns trotzdem rechnen: In dem Fall nähmen die Treibgase in der Zeit dt den Impuls $\mu \cdot dt \cdot (c + v)$ aus der Rakete, also änderte sich der Impuls der Rakete um

$$dp = \mu \cdot dt \cdot (-c - v) \quad ,$$

also wäre die Kraft der Treibgase gegeben durch

$$F = \frac{dp}{dt} = \mu \cdot (-c - v) \quad ,$$

das heißt, die Kraft wäre negativ.

Stellen Sie sich nun vor, dass die Treibgase nach vorn mit einer Strahlgeschwindigkeit austreten, die im Vergleich zur Raketengeschwindigkeit sehr klein ist. Das heißt, es soll gelten: $c \ll v$. In dem Fall nähmen die Treibgase in der Zeit dt ungefähr den Impuls $\mu \cdot dt \cdot v$ aus der Rakete. Deren Impulsänderung wäre auch in diesem Fall negativ:

$$dp \approx \mu \cdot dt \cdot (-v) \quad ,$$

und auch in diesem Fall wäre die Kraft auf die Rakete negativ:

$$F = \frac{dp}{dt} \approx \mu \cdot (-v) \quad .$$

Denken Sie sich nun den Realfall einer hinreichend schnellen Rakete: In dem Fall strömen die Treibgase rückwärts aus, aber mit einer Geschwindigkeit, deren Betrag c kleiner als die Raketengeschwindigkeit v ist. Die Treibgase, obwohl mit der negativen Geschwindigkeit $-c$ ausgestrahlt – gesehen von einem Beobachter in der Rakete –, fliegen mit der Geschwindigkeit $v - c$ nach vorn – gesehen vom äußeren Beobachter. Die Treibgase nehmen in der Zeit dt den positiven Impuls $\mu \cdot dt \cdot (v - c)$ mit, dieser Impuls wird der Rakete entzogen: die Rakete verliert infolge der Treibgas-Ausstrahlung an Impuls, ihre Impulsänderung ist negativ – vom äußeren Beobachter aus gesehen:

$$dp = \mu \cdot dt \cdot (c - v) \quad .$$

Das ist die Wirkung einer *negativen* Kraft – gesehen vom äußeren Beobachter aus:

$$F = \frac{dp}{dt} = \mu \cdot (c - v) \quad .$$

Zusammenfassung: Die Aussage, dass die rechte Seite der Gl. (20), die „Kraft" $\mu \cdot (c - v)$, bei großen Geschwindigkeiten der Rakete negativ wird, ist sinnvoll und wahr – im Bezugssystem eines äußeren unbeschleunigten Beobachters. □

Literaturhinweis: G. Falk schlägt in seinem Aufgabenkomplex zur Rakete unter anderem vor, den Impuls der Rakete (im Bezugssystem eines unbeschleunigten äußeren Beobachters) als Funktion der Zeit zu berechnen [56]. In der Musterlösung skizziert er den Graphen dieser Funktion, und wir sehen, wie der Impuls zunächst mit der Zeit ansteigt, sein Maximum erreicht und danach wieder abfällt. Die Ableitung des Impulses nach der Zeit ist die Kraft der Treibgase auf die Rakete, und die Kraft ist für die Zeiten des abfallenden Astes des Graphen negativ (im Bezugssystem des äußeren Beobachters).

6 Anschauung in konkreten Beispielen: Parameter der (in Luft) arbeitenden Rakete

Physikalische Themen: Im Abschnitt 6.1 erklären wir uns den *Massendurchsatz* einer Feststoffrakete (eines *Stirnbrenners*) aus der *Abbrandgeschwindigkeit* des Treibstoffs. Dabei brauchen wir die Definitionen des *Durchsatzes* und der *Dichte*. In den Abschnitten 6.2 und 6.3 rechnen wir mit konkreten Werten (Zahlen samt Maßeinheiten) für die Systemparameter (das sind hier *Startmasse, Brennschlussmasse, effektive Strahlgeschwindigkeit* und *Massendurchsatz*) und gewinnen ein Gefühl für erzielbare *Idealgeschwindigkeiten*:

Eine fünfundzwanzig Meter lange Rakete könnte im Idealfall (wenn keine Kräfte auf sie wirkten) eine Masse von vierzehn Tonnen auf die Geschwindigkeit von viereinhalb Kilometern durch Sekunde bringen, genauer auf 4,6 km/s. Und wieviel könnte eine hundertelf Meter lange Rakete wie die *Saurn 5* schaffen? Auch das rechnen wir aus.

Mathematische Anforderungen: Im Abschnitt 6.1 können Sie *geometrisch elementar* rechnen oder *algebraisch elementar* mit *Differentialen* (das läuft hier nicht auf eine Differentialgleichung hinaus). In den Abschnitten 6.2 und 6.3 brauchen Sie nur konkrete Gegebenheiten in die im Hauptabschnitt 4 gewonnenen Grundgleichungen einzusetzen und *Taschenrechner*-Ergebnisse auszurechnen – und die Ergebnisse auf sich wirken zu lassen.

6.1 Der Durchsatz eines Stirnbrenners

Beginnen wir bescheiden. Die erste Aufgabe soll uns den *Massendurchsatz* einer kleineren Feststoffrakete anschaulich machen, und zwar eines *Stirnbrenners*. Die Erklärung des Stirnbrenners und ein durchgerechnetes konkretes Beispiel dazu entnehme ich dem Klassiker von Harry O. Ruppe ([1], S. 76ff.) und gebe sie zusammenfassend mit meinen eigenen Worten wieder:

Erklärung: Ein *Stirnbrenner* ist eigentlich nur ein zylindrischer Metallbehälter, der mit festem Raketentreibstoff lückenlos gefüllt ist, vorne abgerundet geschlossen und hinten, am halsförmigen Übergang zur Düse, offen. (Dass die hintere Wand des Treibstoffzylinders „Stirn“ heißt, hat mich lange irritiert.) Der Treibstoff wird an seiner Rückwand, an der „Stirn“, entzündet, und die Flammenfront rückt mit konstanter Geschwindigkeit, der *Abbrandgeschwindigkeit*, nach vorne vor ([1], S. 76ff.). (Die Flammenfront bewegt sich zum „Kopf“ der Rakete hin – aber die „Stirn“ gelangt erst am Brennschluss zum „Kopf“.)

Unter den Feststoffraketen ist der *Innenbrenner* die Alternative zum Stirnbrenner, in ihm reicht ein offener Raum *(Brennkanal)* von der Düse in die Treibstoffmasse hinein. Dadurch hat der Innenbrenner eine größere Oberfläche als der Stirnbrenner und verbrennt im gleichen Zeitraum mehr Treibstoff als dieser ([1], S. 80ff.).

Vorschlag: Berechnen Sie den Durchsatz eines *Stirnbrenners* ganz allgemein und speziell für einen Durchmesser von $0,1$ m und eine Treibstoffdichte von $1\,800$ kg m^{-3}, dessen Flammenfront am festen Treibstoff mit der Geschwindigkeit von $0,01$ m s^{-1} vorrückt!

Meta-physikalische Empfehlungen – zum problemlösenden Denken: Wenn Ihnen nicht sofort einfällt, wie Sie die Aufgabe angehen könnten, dann sollten Sie sich zunächst entspannen.

Ich biete Ihnen zwei Musterlösungen an, eine algebraische und eine geometrische. Der geometrische Weg ist schöner und kürzer, alles spricht für ihn, aber um ihn zu finden, müssen Sie sich den Abbrand des festen Raketentreibstoffs bildlich vorstellen, und das geht am besten im entspannten Zustand. Um den algebraischen Weg schnell zu finden, brauchen Sie nur die Gegebenheiten und die gesuchte Größe ordentlich untereinander aufzuschreiben, und dazu auch alle Gleichungen zwischen den Gegebenheiten und der gesuchten Größe: Sie sollten die Aufgabe *formalisieren*. Haben Sie das getan und gucken Sie das Aufgeschriebene lange genug an, dann fällt Ihnen bestimmt ein, wie Sie vorgehen können (natürlich müssen sie nicht nur gucken, sondern dabei auch nach einer Lösung *suchen*).

Aber bitte, *suchen* Sie selbst nach einem Lösungsweg! Sie wollen doch nicht nur über die Rakete etwas lernen; Sie wollen doch vor allem lernen, Lösungswege zu finden, und dazu gehört, dass Sie immer wieder nach Lösungswegen *suchen*.

Gegeben:

- Der Zylinderradius: $R = 0,05$ m ;
- die Treibstoffdichte: $\rho = 1\,800$ kg m^{-3} ;
- die Geschwindigkeit der Flammenfront: $v = 0,01$ m s^{-1} .

Gesucht: Der Massendurchsatz μ.

Grundgleichungen: Die Definitionen des Durchsatzes und der Dichte:

$$\mu := \frac{|dM|}{dt} \quad ; \quad \rho := \frac{|dM|}{|dV|} \quad .$$

Algebraische Lösung: Wir legen die x-Achse in die Symmetrie-Achse der Rakete (in Laufrichtung der Flammenfront) und können danach die gegebene Abbrandgeschwindigkeit v durch die Differentiale dx und dt ausdrücken:

$$v := \frac{dx}{dt} \quad .$$

Das Volumenelement dV hängt mit dem Längenelement dx zusammen:

$$|dV| = A \cdot dx \quad ,$$

und mit dem Flächeninhalt A der Flammenfront. Ihn kennen wir, denn er ist durch den Querschnitts-Radius R, den halben Durchmesser des Treibstoffzylinders gegeben:

$$A = \pi \cdot R^2 \quad .$$

Damit haben wir alle Gleichungen beisammen, die wir zur Bestimmung der gesuchten Größe μ brauchen.

Aus den beiden Grundgleichungen eliminieren wir das Massenelement $|dM|$. Dazu schreiben wir die beiden Gleichungen so um, dass es jeweils auf einer Seite steht:

$$|dM| = \mu \cdot dt \quad ;$$

$$|dM| = \rho \cdot |dV| \quad .$$

Zwei Größen, die einer dritten Größe gleich sind, sind auch untereinander gleich, also

$$\mu \cdot dt = \rho \cdot |dV| = \rho \cdot A \cdot dx \quad ,$$

also

$$\mu = A \cdot \rho \cdot \frac{dx}{dt} \quad ,$$

kurz

$$\mu = A \cdot \rho \cdot v \quad ,$$

oder wenn wir den Flächeninhalt A durch den Radius R ausdrücken:

$$\boxed{\mu = \pi \cdot R^2 \cdot \rho \cdot v} \quad . \quad \square$$

Das ist der allgemeine Zusammenhang zwischen dem Durchsatz μ und der Abbrandgeschwindigkeit v eines Stirnbrenners, es eine *Proportionalität.* Konkret für den beschriebenen Stirnbrenner erhalten wir

$$\mu = \pi \cdot 0,002.5 \text{ m}^2 \cdot 1\,800 \text{ kg m}^{-3} \cdot 0,01 \text{ m s}^{-1} = 0,045 \cdot \pi \text{ kg s}^{-1} \quad ;$$

$$\boxed{\mu = 0,141\,4 \text{ kg s}^{-1}} \quad . \quad \square$$

Vergleich der Ergebnisse: Ruppe gibt diesen Durchsatz auch konkret an ([1], S. 77), wir haben uns nicht verrechnet.

Kommentar: Der Durchsatz ist tatsächlich bescheiden: In einer Sekunde strahlt der Stirnbrenner nicht einmal 150 Gramm ab. Das erklärt sich aus seiner kleinen Abbrandfläche: Innenbrenner mit ihren wesentlich größeren Abbrandflächen haben entsprechend höhere Durchsätze.

Geometrische Lösung: Im stationären Betrieb wird in einer Sekunde durch die Düse soviel Treibstoff-Masse abgestrahlt wie an der Brennfläche verbrannt. Speziell bei der gegebenen Abbrandgeschwindigkeit wird in einer Sekunde der feste Treibstoff einer Kreisscheibe von einem Zentimeter Dicke verbrannt; allgemein wird in der Zeit dt der Inhalt einer Kreisscheibe der Dicke $v \cdot dt$ verbrannt. Also ist das in einer Sekunde abgebrannte Volumen festen Treibstoffs, das Volumenelement dV zum Zeitzuwachs dt, allgemein durch die Abbrandgeschwindigkeit v, den Zeitzuwachs dt und den Flächeninhalt A der Querschnittsfläche des Treibstofftanks gegeben:

$$|dV| = v \cdot dt \cdot A \quad .$$

Das zugehörige Treibstoff-Massenelement $|dM|$ ergibt sich nach der Definition der Dichte ρ, also nach der Gleichung $|dM| = \rho \cdot |dV|$:

$$|dM| = \rho \cdot v \cdot dt \cdot A \quad ,$$

und der gesuchte Durchsatz μ ist nach Definition das Verhältnis dieses Massenelements $|dM|$ zum zugehörigen Zeitzuwachs dt:

$$\mu = \rho \cdot v \cdot A \quad ,$$

oder wenn wir den Flächeninhalt A durch den Zylinderradius R ausdrücken:

$$\boxed{\mu = \pi \cdot R^2 \cdot \rho \cdot v} \quad . \qquad \square$$

Den konkreten Durchsatz haben Sie vielleicht schon ausgerechnet, bevor Sie begannen, den Allgemeinfall zu beschreiben, oder vielleicht haben Sie ihn im Kopf überschlagen: Das Volumen der Kreisscheibe festen Treibstoffs, der in einer Sekunde verbrennt, ist gleich $\pi \cdot (5\ \text{cm})^2 \cdot 1\ \text{cm} = 25 \cdot \pi\ \text{cm}^3$. Jeder Kubikzentimeter hat die Masse von 1,8 Gramm, also werden in einer Sekunde $1,8 \cdot 25 \cdot \pi\ \text{Gramm} = 0,9 \cdot 50 \cdot \pi\ \text{Gramm} = 45 \cdot \pi\ \text{Gramm}$ verbrannt, das dürften knapp 150 Gramm sein:

$$|dM| = \rho \cdot |dV| = 1,8\ \text{g cm}^{-3} \cdot \pi \cdot (5\ \text{cm})^2 \cdot 1\ \text{cm} = 45 \cdot \pi\ \text{g} \quad ,$$

wobei ich in dieser Gleichung die abgeleitete Maßeinheit Gramm mit g abgekürzt habe. So erhalten wir nach Definition des Durchsatzes, $\mu := |dM|/dt$,

$$\boxed{\mu = 141,4\ \text{g s}^{-1}} \quad ,$$

natürlich das gleiche Ergebnis wie auf dem algebraischen Lösungsweg. $\square$

6.2 Ein Raketenbeispiel

Um konkrete Werte für die Größen zu finden, die in die Tsiolkovsky-Formel eingehen, griff ich als erstes nach dem *Ruppe*. Im Band 2 fand ich, wonach ich suchte, das ausführlich besprochene Beispiel einer mit Kerosin und flüssigem Sauerstoff betankten Rakete: 25,7 m lang und 2,15 m breit ([1], S. 25, 30ff., 47).

Gegeben:

- die Startmasse $M_0 := M(0) = 83\,000$ kg ;
- die Brennschlussmasse $M_1 := M(t_1) = 14\,000$ kg ;
- die *effektive* Strahlgeschwindigkeit $c_{\text{eff}} = 2\,600 \text{ m s}^{-1}$.

Vorschlag: Berechnen Sie daraus die Brennschlussgeschwindigkeit $v(t_1)$!

Hinweis: Alle Überlegungen des Hauptabschnitts 4 zur Bestimmung der Geschwindigkeit der *in Vakuum* betriebenen Rakete gingen von Gl. (3) aus. Also müssen alle Überlegungen zur Bestimmung der Geschwindigkeit einer *in Luft* betriebenen Rakete von der entsprechenden Gl. (8) ausgehen.

Lösungsgrundlage: Alle Gleichungen, die wir im Hauptabschnitt 4 für eine im Vakuum arbeitende Rakete hergeleitet haben, gelten auch für die in Luft arbeitende Rakete, wenn wir in ihnen nur die Strahlgeschwindigkeit $c(t)$ durch die effektive Strahlgeschwindigkeit c_{eff} ersetzen.

Wir suchen eine Beziehung zwischen der Brennschlussgeschwindigkeit $v(t_1)$, der Startmasse M_0 und der Brennschlussmasse M_1 einerseits und der effektiven Strahlgeschwindigkeit c_{eff} andererseits. Ersetzen wir in der Tsiolkovsky-Gleichung (17), die wir für eine Rakete im Vakuum hergeleitet haben, die Strahlgeschwindigkeit $c(t)$ durch die effektive Strahlgeschwindigkeit c_{eff}, so erhalten wir die Grundgleichung für die vorliegende Aufgabe:

$$v_1 := v(t_1) = c_{\text{eff}} \cdot \ln(M_0/M_1) \quad .$$

Lösung: Setzen wir die Gegebenheiten in die Grundgleichung ein, so erhalten wir unmittelbar die gesuchte Brennschlussgeschwindigkeit v_1:

$$v_1 = 2\,600 \text{ m s}^{-1} \cdot \ln\Big(\frac{83\,000 \text{ kg}}{14\,000 \text{ kg}}\Big) \quad ;$$

$$\boxed{v_1 = 4\,627 \text{ m s}^{-1}} \quad .$$

Vergleich der Ergebnisse: Ruppe gab auch 4 627 m s^{-1} als *Idealgeschwindigkeit* an ([1], S. 47), also haben wir uns nicht verrechnet.

Vorschlag: Berechnen Sie zu den Gegebenheiten der vorliegenden Beispielrakete die Brenndauer t_1 und den Durchsatz μ!

Lösung: Die Gegebenheiten hängen mit dem Durchsatz μ und der Brenndauer t_1 nur über das Produkt $\mu \cdot t_1$ zusammen, siehe Gl. (9): $M(t_1) = M_0 - \mu \cdot t_1$. Anders gesagt, durch die beiden Massen M_0 und M_1 ist nur das Produkt $\mu \cdot t_1$ gegeben, sonst ist weiter nichts über seine Faktoren μ und t_1 bekannt. Daran ändert die Kenntnis der beiden Geschwindigkeiten c und v_1 nichts – und das Wissen um die Tsiolkovsky-Formel ändert daran auch nichts. Aus den beiden Massen M_0 und M_1 und den beiden Geschwindigkeiten c_{eff} und v_1 können wir nur auf das Produkt $\mu \cdot t_1$ von Durchsatz und Brenndauer schließen:

$$\boxed{\text{Die Aufgabe ist unlösbar!}} \quad \square$$

Frage: Eigentlich hat Ihnen die letzte Überlegung nur gezeigt, was die Tsiolkovsky-Formel nicht kann. Aber was leistet sie eigentlich?

Antwort: Sie sagt uns, dass wir nur das Verhältnis der Startmasse und der Brennschlussmasse zu wissen brauchen – und die Strahlgeschwindigkeit –, um die höchstmögliche Raketengeschwindigkeit zu kennen (viele sagen Idealgeschwindigkeit dazu). Dabei ist es ganz egal, mit welchem Durchsatz und wie lange die Raketenmotoren laufen, wenn nur das Produkt von Durchsatz und Brenndauer gleich der Differenz zwischen der Startmasse und der Brennschlussmasse ist! □

Selbstverständlich hat sich Ruppe das „Raketenbeispiel“ gut überlegt und auch einen konkreten Massendurchsatz μ angenommen ([1], S. 31):

$$\mu = 377,31 \text{ kg s}^{-1} \quad .$$

Lassen wir diese Größe auf uns wirken: Dieser Durchsatz ist über zweitausendmal größer als der Durchsatz des Stirnbrenners, den wir im Abschnitt 6.1 durchgespielt hatten, über *zweitausendmal* größer!

Vorschlag: Nehmen Sie diese Angabe zu den Gegebenheiten hinzu und berechnen Sie daraus die Brennzeit t!

Lösungsgrundlage: $M(t) = M_0 - \mu \cdot t$, siehe Gl. (9).

Lösung: Wir brauchen bloß die Grundgleichung nach der hier gesuchten Zeit t aufzulösen,

$$\boxed{t = \frac{M_0 - M(t)}{\mu}} \quad ,$$

und hierin die Gegebenheiten einzusetzen:

$$t = \frac{83\,000 \text{ kg} - 14\,000 \text{ kg}}{377,31 \text{ kg s}^{-1}} \quad .$$

So erhalten wir konkret

$$\boxed{t = 182,9 \text{ s}} \quad .$$

Vergleich der Ergebnisse: Das Ergebnis hat Ruppe auch genannt: „knappe 183 s" ([1], S. 32). Auch hier haben wir also richtig gerechnet..

6.3 Die erste Stufe der *Saturn 5*

Der Abschnitt 6.1 sollte Sie mit dem Durchsatz einer kleineren Rakete vertraut gemacht haben, und das zuletzt durchgerechnete Raketenbeispiel könnte Ihnen ein Gefühl für die Möglichkeiten einer Rakete mittlerer Größe gegeben haben. Sicher möchten Sie nun mit einer Großrakete rechnen. Auch da hilft Ihnen Ruppe weiter. Die *Saturn 5* mit der Länge von 111 m ist die bisher und wahrscheinlich noch lange Zeit größte Rakete, und über sie gibt uns Ruppe einige Daten.

Wir wollen sehen, auf welche Idealgeschwindigkeit die fünf Raketenmotoren der ersten Stufe die *Saturn 5* hatten bringen können. Um die Idealgeschwindigkeit v_1 nach der Tsiolkovsky-Formel berechnen zu können, brauchen wir die effektive Strahlgeschwindigkeit c_{eff}.

Wir können aber nicht sofort die Tsiolkovsky-Formel anwenden, denn die effektive Strahlgeschwindigkeit (oder den spezifischen Impuls I) gibt Ruppe für die erste Stufe nicht an. (Der spezifische Impuls I in Luft ist definiert als das Verhältnis c_{eff}/g der effektiven Strahlgeschwindigkeit zur mittleren Erdbeschleunigung, wobei die mittlere Erdbeschleunigung g das mittlere Verhältnis der Gewichtskraft zur Masse eines Körpers an der Erdoberfläche bedeutet.) Offenbar hatte Ruppe auf diese Angabe für die erste Stufe verzichtet, weil er den Startschub angegeben hatte; denn für die beiden anderen Stufen gibt er die spezifischen Impulse an ([1], S. 147). Wollen wir also die Idealgeschwindigkeit v_1 berechnen, so *müssen* wir vorher die effektive Strahlgeschwindigkeit berechnen.

Gegeben:

- die Startmasse der gesamten *Saturn 5* samt Nutzlast ([1], S. 147): $M_0 = 2\,923\,500 \text{ kg} \quad ;$
- davon gesamte Treibstoffmasse der ersten Stufe ([1], S. 146): $M_0 - M_1 = 2\,000\,000 \text{ kg} \quad ;$
- der gesamte Massendurchsatz der Motoren der ersten Stufe ([1], S. 146): $\mu = 5 \cdot 2\,700 \text{ kg s}^{-1} \quad ;$

- „der Startschub“ entsprechend einer Gewichtskraft auf $5 \cdot 680\,000$ kg an der Erdoberfläche ([1], S. 146).

Kommentar: Ehrfürchtig versuchen wir den Durchsatz zu erfassen: Durch jeden der fünf Motoren strömten in jeder Sekunde ihres Betriebs 2,7 Tonnen, insgesamt 13,7 Tonnen: das ist ein Durchsatz von dreizehn Komma sieben Tonnen durch *Sekunde*, und zwar mit einer Geschwindigkeit von etwa zwei Kilometern durch *Sekunde* – mit mehrfacher Schallgeschwindigkeit: von der Größenordnung der effektiven Strahlgeschwindigkeit, die wir nun genauer berechnen wollen. – Kein Wunder, dass es dabei laut zuging!

Eine Bemerkung zur Angabe des Startschubs: Ruppe hatte das genannte Buch für einen breiten Leserkreis geschrieben und in ihm die Maßeinheit „Newton“ vermieden. Natürlich wissen Sie als Physik-Fan, dass ein Kilogramm an der Erdoberfläche einer geographischen Normbreite mit einer Gewichtskraft von 9,81 Newton nach unten gezogen wird.

Vorschlag: Berechnen Sie also zunächst die effektive Strahlgeschwindigkeit aus dem gegebenen Startschub!

Hinweis: Nach Definition ist die effektive Strahlgeschwindigkeit gleich dem Quotienten aus der Schubkraft und dem Massendurchsatz, siehe Gl. (6).

Lösungsgrundlage: $c_{\text{eff}} := F(0)/\mu$, das ist Gl. (6).

Lösung: In die Grundgleichung dieser Aufgabe setzen wir den Startschub ein, der gleich der Gewichtskraft auf $5 \cdot 680\,000$ Kilogramm ist, also

$$F(0) = 5 \cdot 680\,000 \cdot 9,81 \text{ Newton} \quad ,$$

und wir erhalten zum Durchsatz von $5 \cdot 2\,700 \text{ kg s}^{-1}$:

$$c_{\text{eff}} = \frac{5 \cdot 680\,000 \cdot 9,81 \text{ Newton}}{5 \cdot 2\,700 \text{ kg s}^{-1}} \quad ;$$

$$c_{\text{eff}} = \frac{680\,000 \cdot 9,81 \text{ kg m s}^{-2}}{2\,700 \text{ kg s}^{-1}} \quad ;$$

$$\boxed{c_{\text{eff}} = 2\,471 \text{ m s}^{-1}} \quad .$$

Vorschlag einer Anschlussaufgabe: In die Berechnung der effektiven Strahlgeschwindigkeit ging meine Vermutung ein, dass Ruppe mit 9,81 Newton als Gewichtskraft auf 1 kg rechnete. Berechnen Sie die effektive Strahlgeschwindigkeit c_{eff}, indem Sie abgerundet 10 Newton als Gewichtskraft auf 1 kg zugrunde legen!

Ergebnis der Anschlussaufgabe: $c_{\text{eff}} = 2\,518,5 \text{ m s}^{-1}$.

<u>**Vorschlag:**</u> Berechnen Sie die Brennzeit t_1 der ersten Stufe der *Saturn 5* (um damit später weiterrechnen zu können)!

Lösungsgrundlage: $M(t_1) = M_0 - \mu \cdot t_1$, siehe Gl. (9).

Lösung: Wie in der Rechnung zur Beispielsaufgabe [s. Abschnitt 6.2] lösen wir die Grundgleichung (9) nach der Zeit t_1 auf, doch diesmal setzen wir die Gegebenheiten der *Saturn 5* ein,

$$t_1 = \frac{2\,000\,000 \text{ kg}}{5 \cdot 2\,700 \text{ kg s}^{-1}} \quad ,$$

und erhalten

$$\boxed{t_1 = 148,1 \text{ s}} \quad .$$

Vergleich der Ergebnisse: Bei Ruppe lesen wir: „Brennzeit (nominal) 150 s“ ([1], S. 32). Total daneben liegen wir nicht.

7 Die Bewegung der kräftefreien Rakete (im Vakuum)

Im Hauptabschnitt 3 hatten wir die *Bewegungsgleichung* der kräftefreien Rakete aus dem Impulssatz hergeleitet, wir schrieben sie urprünglich als Differentialgleichung für die Raketengeschwindigkeit als Funktion der Zeit, s. Gl. (14). Indem wir diese Differentialgleichung (14) lösten, s. Gl. (16), haben wir schon etwas zur Lösung der Bewegungsgleichung getan, haben ein „Vorintegral“ oder „erstes Integral“ der Bewegungsgleichung bestimmt. (Eine Lösung einer Differentialgleichung wie der Bewegungsgleichung (4) heißt auch „Integral“ der Differentialgleichung.) Um die Bewegung der Rakete zu bestimmen, brauchen wir nur noch das „erste Integral“, eben Gl. (16), als Differentialgleichung für die Bewegung $x(t)$ aufzufassen,

$$\frac{dx(t)}{dt} = -c \cdot \ln \left(1 - \frac{\mu \cdot t}{M_0}\right) \quad , \tag{21}$$

und zu lösen.

Denjenigen, die erst wenige Differentialgleichungen gelöst haben, biete ich zum Üben eine ähnliche, aber etwas einfachere Differentialgleichung an; doch diejenigen, die sich die Lösung der Differentialgleichung (21) zutrauen – zum Beispiel alle, die schon integrieren können –, bitte ich, den nächsten Vorschlag nicht zu beachten und gleich den übernächsten in Betracht zu ziehen.

7.1 Eine Differentialgleichung zum Aufwärmen

Vorschlag: Lösen Sie die folgende Differentialgleichung (22) durch einen Ansatz für den Funktionsterm $x(\tau)$ der unabhängigen dimensionslosen Variablen τ ! Versuchen Sie also einen Term $x(\tau)$ zu raten, dessen Ableitung nach τ gleich $\ln(\tau)$ ist, für den also gilt:

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = \ln(\tau) \quad . \tag{22}$$

Empfehlung: Versuchen Sie es mit dem Ansatz $x(\tau) = \tau \cdot \ln(\tau) + C$, wobei τ eine dimensionslose Variable und C eine Konstante sein soll. Und falls sich der Ansatz nicht als Lösung herausstellt, korrigieren Sie ihn notfalls – durch einen neuen Ansatz!

Lösung:

Ansatz:

$$x(\tau) = \tau \cdot \ln(\tau) + C \quad .$$

Verifikationsversuch:

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = 1 \cdot \ln(\tau) + \tau \cdot \frac{1}{\tau} = \ln(\tau) + 1$$

nach der Produktenregel der Differentialrechnung und Gl. (13). Der Ansatz erfüllt also nicht die Differentialgleichung (22). Wir brauchen uns aber nicht zu ärgern: der misslungene Verifikationsversuch zeigt uns, wie wir den Ansatz abändern müssen, um eine Lösung der Differentialgleichung (22) zu erhalten!

Neuer Ansatz:

$$x(\tau) = \tau \cdot \ln(\tau) - \tau + C \quad .$$

Verifikation:

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = 1 \cdot \ln(\tau) + \tau \cdot \frac{1}{\tau} - 1 = \ln(\tau) \quad .$$

Der neue Ansatz löst also die Differentialgleichung (10), seine Verifikation ist gelungen. Nun sollten wir auch mit der Differentialgleichung (21) fertigwerden.

7.2 Die Bestimmung der Raketenbewegung durch Lösen einer Differentialgleichung

Vorschlag: Lösen Sie nun Differentialgleichung (21)!

Empfehlungen: Wenn Sie keinen Tipp brauchen, dann rechnen Sie bitte gleich los; aber allen, denen an dieser Stelle nichts einfallen will, biete ich zwei Lösungswege an, wählen Sie nach Lust und Laune:

Auf dem ersten Weg (über einen *Ansatz*) ändern wir den „neuen Ansatz" der letzten „Übungs"-Aufgabe ein wenig ab, passen ihn dem Argument des Logarithmus in Gl. (21) an: Versuchen Sie den Ansatz $x(t) = -c \cdot [\tau \cdot \ln(\tau) - \tau] + C$, wobei τ das Argument des Logarithmus bedeutet, s. Gl. (15), und C wieder eine Konstante bedeutet. Und wenn Sie damit die Lösung nicht getroffen haben, dann verbessern Sie den Ansatz so oft, bis Sie die Lösung getroffen haben!

Auf dem zweiten Weg (über eine *Substitution*) vereinfachen wir die Differentialgleichung (21), indem wir zu einer anderen Variablen übergehen. Was liegt näher als die *Substitution* (15)! Dieser Weg ist eleganter, überlegener als der erste.

Wenn Ihnen danach ist, könnten Sie ja beide Wege gehen. Dabei sollten Sie sich den ersten zuerst vornehmen: sein Ergebnis legt den zweiten Weg nahe.

7.2.1 Geschicktes Raten

Erster Lösungsweg:

Ansatz:

$$x(t) = -c \cdot \left(1 - \frac{\mu \cdot t}{M_0}\right) \cdot \ln\left(1 - \frac{\mu \cdot t}{M_0}\right) + c \cdot \left(1 - \frac{\mu \cdot t}{M_0}\right) + C \quad .$$

Verifikationsversuch:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -c \cdot \left(-\frac{\mu}{M_0}\right) \cdot \ln\left(1 - \frac{\mu \cdot t}{M_0}\right) - c \cdot \left(1 - \frac{\mu \cdot t}{M_0}\right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{\mu \cdot t}{M_0}} \cdot \left(-\frac{\mu}{M_0}\right) + c \cdot \left(-\frac{\mu}{M_0}\right) \quad ;$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = -c \cdot \left(-\frac{\mu}{M_0}\right) \cdot \ln\left(1 - \frac{\mu \cdot t}{M_0}\right) \quad .$$

Die Verifikation ist misslungen, aber nur ganz knapp: Wir hatten den Ansatz in Gl. (21) eingesetzt und so die rechte Seite der Gl. (21) erhalten, aber mit dem Faktor $(-\mu/M_0)$ multipliziert. Wir brauchen also bloß diesen Ansatz mit dem Kehrwert von $(-\mu/M_0)$ zu multiplizieren, um die Lösung von Gl. (21) zu erhalten.

Neuer Ansatz:

$$x(t) = -\frac{M_0}{\mu}\left[-c \cdot \left(1 - \frac{\mu \cdot t}{M_0}\right) \cdot \ln\left(1 - \frac{\mu \cdot t}{M_0}\right) + c \cdot \left(1 - \frac{\mu \cdot t}{M_0}\right) + C\right] \quad .$$

Verifikation: Hier genügt wohl der Hinweis auf den Verifikationsversuch. Der neue Ansatz, die gefundene Lösung von Gl. (21), lässt sich etwas vereinfachen:

$$x(t) = \frac{c}{\mu} \cdot \left(M_0 - \mu \cdot t\right) \cdot \ln\left(1 - \frac{\mu \cdot t}{M_0}\right) - \frac{M_0}{\mu} \cdot c + c \cdot t - \frac{M_0}{\mu} \cdot C \quad .$$

Die *Integrationskonstante* C können wir aus der Anfangsbedingung bestimmen: Wir setzen $t = 0$ in die letzte Gleichung ein, und zur Anfangsbedingung

$x(0) = 0$ erhalten wir $0 = 0 - (M_0/\mu) \cdot c + 0 - (M_0/\mu) \cdot C$, also $C = -c$. Damit haben wir die Bewegung der kräftefreien Rakete vollständig bestimmt,

$$x(t) = \frac{c}{\mu} \cdot \big(M_0 - \mu \cdot t\big) \cdot \ln\!\left(1 - \frac{\mu \cdot t}{M_0}\right) + c \cdot t \quad ,$$

oder etwas übersichtlicher:

$$\boxed{x(t) = \frac{c \cdot M(t)}{\mu} \cdot \ln\!\left(\frac{M(t)}{M_0}\right) + c \cdot t \text{ , wobei } M(t) = M_0 - \mu \cdot t} \quad . \tag{23}$$

Überleitung zum zweiten Lösungsweg: Dem Faktor $(-\mu/M_0)$, um den sich der ursprüngliche Ansatz vom korrigierten Ansatz unterscheidet, sind wir schon bei der Vereinfachung der Differentialgleichung (14) begegnet, nämlich beim Einsetzen der Substitution (15) in Gl. (14), er ist die Ableitung der neuen Variablen τ nach der alten Variablen t:

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{\mu}{M_0} \quad .$$

Das legt uns nahe, zur Lösung der Differentialgleichung (21) wieder die Substitution (15) zu versuchen, die uns schon bei der Lösung der Differentialgleichung (14) weitergeholfen hat.

7.2.2 Eine gezielte Substitution

Zweiter Lösungsweg: Mit der Substitution (15),

$$\tau := 1 - \frac{\mu \cdot t}{M_0} \quad ,$$

vereinfachen wir die Differentialgleichung (21), genauer gesagt: wir verwandeln die Differentialgleichung (21) in eine äquivalente einfachere Differentialgleichung. Wir schreiben also anstelle der Differentialgleichung (21) eine Differentialgleichung zwischen Termen mit der Variablen τ anstatt der Variablen t. Als transformierte rechte Seite (r. S.) der Differentialgleichung (21) erhalten wir

$$\text{r. S.} = -c \cdot \ln(\tau) \quad ,$$

die rechte Seite hiervon ist tatsächlich einfacher als die rechte Seite von Gl. (21). Und auf der linken Seite (l. S.) der neuen Gleichung haben wir den Funktionsterm $x(t)$ durch den Funktionsterm $y(\tau)$ ersetzt und erhalten so:

$$\text{l. S.} = \frac{dy(\tau)}{dt} = \frac{dy(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = -\frac{dy(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{\mu}{M_0}$$

nach der Kettenregel. So haben wir die Differentialgleichung (21) verwandelt in

$$-\frac{dy(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{\mu}{M_0} = -c \cdot \ln(\tau)$$

mit der Normalform

$$\frac{dy(\tau)}{d\tau} = \frac{c \cdot M_0}{\mu} \cdot \ln(\tau) \quad . \tag{24}$$

Diese Differentialgleichung lösen wir auf Anhieb:

Ansatz:

$$y(\tau) = \frac{c \cdot M_0}{\mu} \left[\tau \cdot \ln(\tau) - \tau\right] + K \quad ,$$

wobei K eine frei wählbare Konstante (eine „Integrationskonstante“) sein soll.

Verifikation:

$$\frac{dy(\tau)}{d\tau} = \frac{c \cdot M_0}{\mu} \left[1 \cdot \ln(\tau) + \tau \cdot \frac{1}{\tau} - 1\right] = \frac{c \cdot M_0}{\mu} \cdot \ln(\tau) \quad ,$$

der Ansatz löst tatsächlich die vereinfachte Differentialgleichung (24).

Die Substitution hat ihre Schuldigkeit getan, die Substitution kann gehen [frei nach Schiller]. Wir kehren die Substitution (15) um, bringen $y(\tau)$ in die Form $x(t)$:

$$x(t) = \frac{c \cdot M_0}{\mu} \left[\left(1 - \frac{\mu \cdot t}{M_0}\right) \cdot \ln\left(1 - \frac{\mu \cdot t}{M_0}\right) - \left(1 - \frac{\mu \cdot t}{M_0}\right)\right] + K \quad ,$$

und vereinfachen:

$$x(t) = \frac{c}{\mu} \cdot \left(M_0 - \mu \cdot t\right) \cdot \ln\left(1 - \frac{\mu \cdot t}{M_0}\right) - \frac{c \cdot M_0}{\mu} + c \cdot t + K \quad .$$

Jetzt sind wir soweit, die Integrationskonstante K zu bestimmen. In die letzte Gleichung setzen wir $t = 0$ ein und erhalten aus der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ die folgende Gleichung: $0 = 0 - c \cdot M_0/\mu + 0 + K$, also $K = c \cdot M_0/\mu$. Damit haben wir die Bewegung der kräftefreien Rakete vollständig berechnet:

$$x(t) = \frac{c}{\mu} \cdot \left(M_0 - \mu \cdot t\right) \cdot \ln\left(1 - \frac{\mu \cdot t}{M_0}\right) + c \cdot t \quad ,$$

oder übersichtlicher:

$$\boxed{x(t) \;=\; \frac{c \cdot M(t)}{\mu} \cdot \ln\left(\frac{M(t)}{M_0}\right) + c \cdot t} \quad ,$$

wobei $M(t) = M_0 - \mu \cdot t$. Wir haben uns nicht verrechnet: das Ergebnis ist das gleiche wie das auf dem ersten Lösungsweg erhaltene.

8 Die senkrecht aufsteigende Rakete (in Luft)

Physikalische Themen: Aufstellung der *Bewegungsgleichung* für die im homogenen Schwerefeld senkrecht startende Rakete und die Lösung des *Bewegungsproblems*: die Bestimmung der Geschwindigkeit und der Höhe der Rakete als Funktionen der Zeit. Zum ersten Mal rechnen wir mit der in Luft arbeitenden Rakete: Wir ersetzen die für Vakuum geltende Strahlgeschwindigkeit durch die in Abschnitt 3.3 eingeführte *effektive* Strahlgeschwindigkeit.

Mathematische Anforderungen: Lösung einer *Differentialgleichung* für die Geschwindigkeit der Rakete als Funktion der Zeit (Bestimmung des „ersten Integrals" der Bewegungsgleichung). Und Lösung einer *Differentialgleichung* für die Höhe der Rakete als Funktion der Zeit (Lösung des „ersten Integrals"). Gebraucht werden wie in den Hauptabschnitten 4 und 7 die Ableitungen von $\ln(x)$ und $x \cdot \ln(x)$.

Zielstellung: Wir nehmen uns vor, in diesem Hauptabschnitt 8 den senkrechten Aufstieg einer Rakete in der Erdatmosphäre zu berechnen: zuerst die Geschwindigkeit der Rakete als Funktion der Zeit, und danach die Bewegung, das heißt hier die Höhe der Rakete als Funktion der Zeit.

8.1 Die Bewegungsgleichung der Rakete im homogenen Schwerefeld

Zum Titel: Ich habe lange hin und her überlegt: Sollte ich nicht besser sagen: „im homogenen Gewichtsfeld"? Denn der Schub der startenden Rakete muss die *Gewichtskraft* überwinden und nicht die *Schwerkraft*. Sie kennen doch den Unterschied?

Vorschlag: Definieren Sie die *Gewichtskraft* (wir müssen noch mit ihr rechnen)!

Definition: Unter der *Gewichtskraft* auf einen Körper, der an der Oberfläche eines Himmelskörpers wie der Erde ruht, verstehen wir die Überlagerung von Schwerkraft und Fliehkraft auf diesen Körper (eigentlich ihre Vektorsumme).

Zurück zum Titel: Ich lasse die inkorrekte Überschrift stehen und bitte, mich zu entschuldigen: „Gewichtsfeld" habe ich nirgendwo gelesen oder gehört. Vielleicht liest jemand in meinem Inhaltsverzeichnis vom Gewichtsfeld und möchte danach nicht mehr weiterlesen!

Hinweise: Die Schwerkraft auf einen Probekörper an der Erdoberfläche ist auf den Mittelpunkt der Erde gerichtet (in der Näherung einer kugelförmigenen Erde); die Fliehkraft auf den Probekörper ist viel schwächer und weist senkrecht von der Erdachse weg. Darum zeigt die Gewichtskraft in der Regel nicht genau auf den Erdmittelpunkt (die Ausnahmen sind die Gewichtskräfte am Nordpol, Südpol und an allen Punkten des Äquators), und sie ist etwas schwächer als die Schwerkraft (außer am Nordpol oder am Südpol). *Senkrechter* Start heißt ein Start genau *entgegen der Gewichtskraft.*

Weil Schwerkraft und Fliehkraft auf einen Probekörper *proportional* zu dessen Masse sind, gilt dies auch für die Gewichtskraft auf den Körper. Sie kennen doch den mathematischen Begriff der *Proportionalität*?

Vorschlag: Definieren Sie die *Proportionalität*!

Definition: Zwei variable Größen x und y heißen *proportional* zueinander, wenn ihr Quotient gleich einer Konstanten c ist, kurz wenn $x/y = c$. Diese Konstante c heißt *Proportionalitätskonstante.*

Hinweise: Speziell zur Proportionalität von Gewichtskraft F_{Gewicht} und Masse M heißt die Proportionalitätskonstante *Fallbeschleunigung* oder *Erdbeschleunigung* (für die Mittelstufe wird sie gern *Ortsfaktor* genannt). Ihr positiver Betrag wird meist mit dem kleingeschriebenen Buchstaben g abgekürzt, es gilt also $F_{\text{Gewicht}}/M = g$ oder $F_{\text{Gewicht}}/M = -g$ je nachdem, ob die Maßzahl der Gewichtskraft positiv oder negativ ist.

Natürlich legen wir die x-Achse in die Richtung des Raketenschubs, der stärker sein muss als die Gewichtskraft (sonst hebt die Rakete nicht ab), also gilt in unserem Koordinatensystem

$$F_{\text{Gewicht}} = -M \cdot g \quad .$$

Vorschlag: Stellen Sie die Bewegungsgleichung einer im homogenen Schwerefeld senkrecht startenden Rakete auf!

Empfehlungen zur Schreibweise: Wir knüpfen hier an die Überlegungen des Hauptabschnitts 3 an. Dort hatten wir den Schub einer kräftefreien Rakete, die Reaktionskraft der ausströmenden Treibgase, als die Gesamtkraft auf die Rakete in ihrem Ruhsystem beschrieben („kräftefrei" heißt: keine *äußeren* Kräfte) und einfach mit F abgekürzt. Weil hier noch die Gewichtskraft F_{Gewicht} zum Schub hinzukommt, schlage ich vor, die Schubkraft mit F_{Schub} abzukürzen.

Eigentlich müssten wir die Gesamtkraft auf die Rakete als *Vektorsumme* aus dem Schub und der Gewichtskraft schreiben. Aber weil wir nur die Bewegung der *senkrecht* aufsteigenden Rakete berechnen wollen, brauchen wir nur die Komponenten der Kräfte und der Bewegung in der Senkrechten zu betrachten. Senkrecht nach oben hatten wir die x-Achse gelegt, darum brauchen wir nur die x-Komponenten der Kräfte zu betrachten. Wir können aber in der Bezeichnung auf den Index x an diesen Komponenten verzichten, also die Gesamtkraft etwas salopp als algebraische Summe der Schubkraft und der Gewichtskraft schreiben (wir werden F_{Schub} und F_{Gewicht} nicht mit den Absolutbeträgen dieser Kräfte verwechseln!):

$$F := F_{\text{Schub}} + F_{\text{Gewicht}} \quad .$$

Lösung: Wie wir im Abschnitt 3.2 gesehen hatten, ist im Ruhsystem der Rakete die Gesamtkraft F gleich dem Produkt von Masse $M(t)$ und Beschleunigung

$dv(t)/dt$. Also gilt, wenn sich Schub und Gewicht zur Gesamtkraft F überlagern:

$$M(t) \cdot \frac{dv(t)}{dt} = F_{\text{Schub}} + F_{\text{Gewicht}} \quad . \tag{25}$$

Im Abschnitt 3.3 führten wir die effektive Strahlgeschwindigkeit als Quotient der Schubkraft (in Luft) und des Durchsatzes ein, siehe Gl. (6). So erhalten wir für die Schubkraft in Luft den Ausdruck:

$$F_{\text{Schub}} = c_{\text{eff}} \cdot \mu \quad .$$

Auf der rechten Seite von Gl. (25) setzen wir die Ausdrücke für den Schub und die Gewichtskraft der Rakete ein und erhalten:

$$M(t) \cdot \frac{dv(t)}{dt} = c_{\text{eff}} \cdot \mu - M(t) \cdot g \quad ,$$

oder in der Normalform der Differentialgleichung

$$\boxed{\frac{dv(t)}{dt} = \frac{c_{\text{eff}} \cdot \mu}{M(t)} - g} \quad . \quad \square \tag{26}$$

8.2 Die Geschwindigkeit der Rakete als Funktion der Zeit unter Voraussetzung konstanter Strahlgeschwindigkeit

Vorschlag: Gl. (26) ist als Differentialgleichung nicht wesentlich schwerer zu lösen als die entsprechende Gl. (3) für die kräftefreie Bewegung. Versuchen Sie es ohne zurückzublättern!

Lösung: Wir setzen ein, was der Massendurchsatz bedeutet, $\mu := -dM(t)/dt$,

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\, c_{\text{eff}} \cdot \frac{1}{M(t)} \cdot \frac{dM(t)}{dt} - g \quad ,$$

und bereiten die Substitution der Zeitkoordinate t durch das Massenverhältnis $\tau := M(t)/M_0$ vor:

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\, c_{\text{eff}} \cdot \frac{1}{\frac{M(t)}{M_0}} \cdot \frac{d\frac{M(t)}{M_0}}{dt} - g \quad .$$

Aber nun, da wir die Differentialgleichung in ihrer neuen Form vor uns sehen, brauchen wir die Substitution nicht mehr hinzuschreiben; wir sehen genug, um gleich einen Ansatz für die Geschwindigkeit zu probieren:

Ansatz:

$$\boxed{v(t) \;=\; -\, c_{\mathrm{eff}} \cdot \ln\left(\frac{M(t)}{M_0}\right) \;-\; g \cdot t} \quad . \quad \square \tag{27}$$

Verifikation:

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\, c_{\mathrm{eff}} \cdot \frac{1}{\frac{M(t)}{M_0}} \cdot \frac{d\frac{M(t)}{M_0}}{dt} \;-\; g$$

nach der Regel für die Ableitung des Logarithmus und der Kettenregel. Die Verifikation ist gelungen, der Ansatz (27) löst die Differentialgleichung (26).

Natürlich hätten wir auch auf die Lösung (17) der Differentialgleichung (3) der Rakete ohne Gewichtskraft zurückgreifen können, wir brauchten bloß $-g$ hinzuzufügen: „Es geht auch anders, aber so geht es auch." [Bert Brecht]

Kommentar: Mit Gl. (27) haben wir also die Geschwindigkeit einer senkrecht aufsteigenden Rakete als Funktion der Zeit hergeleitet.

Wir freuen uns, dass wir keine spezielle Annahme über den Massenterm $M(t)$ machen mussten – außer dass er differenzierbar sein soll –, insbesondere hatten wir nicht vorausgesetzt, dass der Massendurchsatz $\mu := -dM(t)/dt$ konstant sein soll.

Allerdings hatten wir (um bequem rechnen zu können) vorausgesetzt, dass die *effektive* Strahlgeschwindigkeit c_{eff} konstant ist (ansonsten hätten wir *numerisch* rechnen müssen). In Wirklichkeit hängt die effektive Strahlgeschwindigkeit in komplizierter Weise vom Außendruck ab (s. [1], S. 21–44, vor allem S. 38f.), und darüber freuen wir uns nicht. Denn diese Abhängigkeit müssten wir eigentlich berücksichtigen (die effektive Strahlgeschwindigkeit nimmt von unten nach oben zu). Um abzuschätzen, wie weit unser Ergebnis neben der Wirklichkeit liegt, müssten wir für einen bestimmten Raketenmotor die effektive Strahlgeschwindigkeit zu einigen Höhen kennen, und zu diesen Stützpunkten müssten wir die Geschwindigkeit *dieser* Rakete in einer Näherungsrechnung als Funktion der Zeit numerisch bestimmen.

8.3 Die Bewegung der Rakete (ihre Höhe als Funktion der Zeit) – unter Voraussetzung konstanten Massendurchsatzes und konstanter Strahlgeschwindigkeit

Vorschlag: Nehmen Sie an, während des Aufstiegs wird der Motor der Rakete nicht gedrosselt (der Durchsatz bleibt konstant), und rechnen Sie mit einer konstanten (mittleren) effektiven Strahlgeschwindigkeit. Fassen Sie die soeben gewonnene Formel (27) für die Raketengeschwindigkeit als Differentialgleichung für die Höhe $x(t)$ auf und lösen Sie sie mit einem Ansatz, notfalls mit einer Folge von Ansätzen!

Versuchen Sie es ohne zurückzublättern, und falls es nicht ohne geht, machen Sie sich bewusst, warum Sie zurück mussten: Was hatten Sie noch nicht in Ihrem Langzeitgedächtnis gespeichert?

Lösung: Zuerst setzen wir den für konstanten Durchsatz μ geltenden Massenterm $M(t) = M_0 - \mu \cdot t$ in Gl. (27) ein:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -c_{\text{eff}} \cdot \ln\left(1 - \frac{\mu \cdot t}{M_0}\right) - g \cdot t \quad . \tag{28}$$

Dann erinnern wir uns an die Gleichung $[x \cdot \ln(x) - x]' = \ln(x)$ und nennen das Argument des Logarithmus in Gl. (28) den Term $\tau(t)$, kürzen also Gl. (28) ab:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -c_{\text{eff}} \cdot \ln\big(\tau(t)\big) - g \cdot t \quad .$$

Im noch aufzustellenden Ansatz kompensieren wir die bei der Verifikation auftretende innere Ableitung $d\tau(t)/dt = -\mu/M_0$, indem wir $-c_{\text{eff}} \cdot [\tau \ln(\tau) - \tau]$ mit dem Kehrwert $-M_0/\mu$ der inneren Ableitung multiplizieren. Wir lassen also folgenden Versuchsballon steigen:

Ansatz:

$$x(t) = c_{\text{eff}} \cdot \frac{M_0}{\mu}\left(1 - \frac{\mu \cdot t}{M_0}\right) \cdot \ln\left(1 - \frac{\mu \cdot t}{M_0}\right) - c_{\text{eff}} \cdot \frac{M_0}{\mu}\left(1 - \frac{\mu \cdot t}{M_0}\right) - \frac{1}{2}\, g\, t^2 + C \quad . \tag{29}$$

(Im zweiten Term auf der rechten Seiten hatten wir drei Faktoren mit jeweils negativem Vorzeichen miteinander zu multiplizieren: $(-M_0/\mu)$ mit $(-c_{\text{eff}})$ und $(-\tau)$, und so blieb noch ein Minuszeichen vor dem Produkt übrig.)

Verifikation: Wir differenzieren beide Seiten des Ansatzes nach der Zeit t:

$$\begin{aligned}
\frac{dx(t)}{dt} \;=\;& c_{\text{eff}} \cdot \frac{M_0}{\mu} \cdot \left(-\frac{\mu}{M_0}\right) \cdot \ln\left(1 - \frac{\mu \cdot t}{M_0}\right) \\
&+ c_{\text{eff}} \cdot \frac{M_0}{\mu} \cdot \left(1 - \frac{\mu \cdot t}{M_0}\right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{\mu \cdot t}{M_0}} \cdot \left(-\frac{\mu}{M_0}\right) \\
&- c_{\text{eff}} \cdot \frac{M_0}{\mu} \cdot \left(-\frac{\mu}{M_0}\right) - g \cdot t \\
\;=\;& - c_{\text{eff}} \cdot \ln\left(1 - \frac{\mu \cdot t}{M_0}\right) - g \cdot t \quad .
\end{aligned}$$

Die Verifikation ist gelungen, wir haben die Bewegungsgleichung gelöst.

Bleibt nur noch die Integrationskonstante C zu bestimmen. Wir verabreden, dass der Ort der Rakete zur Zeit $t = 0$ der Ursprung des Koordinatensystems sein soll, kurz $x(0) = 0$, und setzen $t = 0$ in den Ansatz ein. So erhalten wir eine Gleichung für C, nämlich $0 = (c_{\text{eff}} \cdot M_0/\mu) \cdot \ln(1) - (c_{\text{eff}} \cdot M_0/\mu) - (g/2) \cdot 0 + C$, also $C = c_{\text{eff}} \cdot M_0/\mu$. Damit haben wir die Bewegung $x(t)$ bestimmt:

$$x(t) = \frac{c_{\text{eff}}}{\mu}\left(M_0 - \mu \cdot t\right) \cdot \ln\left(1 - \frac{\mu \cdot t}{M_0}\right) - \frac{c_{\text{eff}} \cdot M_0}{\mu} + c_{\text{eff}} \cdot t - \frac{1}{2}\, g\, t^2 + \frac{c_{\text{eff}} \cdot M_0}{\mu} \quad .$$

Wir brauchen die Gleichung nur noch zu vereinfachen:

$$\boxed{x(t) = \frac{c_{\text{eff}} \cdot M(t)}{\mu} \cdot \ln\left(\frac{M(t)}{M_0}\right) + c_{\text{eff}} \cdot t - \frac{1}{2} g\, t^2 \quad \text{mit} \quad M(t) = M_0 - \mu \cdot t} \quad . \qquad (30)$$

So haben wir das Bewegungsproblem der senkrecht aufsteigenden Rakete gelöst: Bis zum Brennschluss können wir die Höhe $x(t)$ der Rakete für jede Zeit t berechnen. $\square$

9 Die *Aerobee*: Beispiel einer Höhenrakete

Ich fürchte, die einzige Rechtfertigung aus der Praxis, nach einem senkrechten Start einen senkrechten Aufstieg bis zum Brennschluss durchzurechnen, sind Höhenforschungsraketen. Aber wir brauchen so eine Rechtfertigung nicht, in erster Linie wollen wir in den konkreten Rechnungen dieses Hauptabschnitts 9 ein Gefühl für das Gegeneinander von Schub und Schwere gewinnen.

Für die Höhenforschung des Jahres 1946 war die *Redstone*, die Weiterentwicklung der *V2* in den USA, eigentlich zu groß und die *Corporal*, eine im Krieg entwickelte Kampfrakete des Heeres, zu klein. Um die Lücke auszufüllen, wurde in den USA die *Aerobee* entwickelt, eine Rakete mit flüssigen Treibstoffen.

Am 24. 11. 1947 startete die erste *Aerobee*, und bis Anfang 1958 wurde sie über 250mal eingesetzt. Erstmals sind mit ihr auch Tiere, weiße Mäuse und Affen, bis auf 80 km Höhe befördert und anschließend an Fallschirmen heil geborgen worden. (Diese Informationen und die Gegebenheiten der folgenden Aufgabe entnehme ich einem Sachbuch Heinz Gartmanns über Raketen [61], S. 121–123.)

9.1 Die Geschwindigkeit nach der Starthilfe

9.1.1 Eine neue Anfangsbedingung für die Geschwindigkeit

Die *Aerobee* hatte keine beweglichen Steuerungselemente und musste deshalb in einem Startturm durch eine *Starthilfe* (eine Feststoffrakete) auf die Geschwindigkeit gebracht werden, bei der die Stabilisierungsflossen ihre Aufgabe erfüllen konnten.

Als wir die Tsiolkovsky-Formel (17) und ihre Verallgemeinerung im homogenen Schwerefeld, also Gl. (27), herleiteten, hatten wir nur Starts mit der Geschwindigkeit null zur Zeit null angenommen. Wenn wir die Bewegung der *Aerobee* durchrechnen wollen, müssen wir aber ihre Starthilfe durch die Feststoffrakete irgendwie berücksichtigen. (Starthilfen brauchen auch die *Space Shuttles* und die *Ariane*-Raketen, bei ihnen sind es Zusatztanks.)

Die *Starthilfe* der *Aerobee* können wir berücksichtigen, weil uns Gartmann auch hierzu Daten angibt: „eine starke Raketenstarthilfe (Feststoffrakete)" ... „die der Rakete binnen 2,5 sec in einem 42 m langen Startturm mehr als ein Viertel ihrer späteren Maximalgeschwindigkeit erteilte" ([61], S. 121). Und als „Höchstgeschwindigkeit" gibt Gartmann „7 400 km/h" an ([61], S. 123).

Textauslegung: Ich verstehe die Textstelle so, dass sich die Starthilfe und die eigentliche Rakete beim Verlassen des Startturms trennten, also 2,5 Sekunden nach dem Start.

Vorschlag: Verallgemeinern Sie Gl. (27) als Lösung von Gl. (26) für den Fall, dass die Rakete zur Zeit 0 die Geschwindigkeit $v(0) \neq 0$ hat!

Wir nennen in der folgenden Aufgabe $t = 0$ diejenige Zeit, zu der sich die Starthilfe von der *Aerobee* gelöst hat (Starthilfe und *Aerobee* begannen demnach ihren Start zur Zeit $t = -2,5$ s), und als Anfangsgeschwindigkeit $v(0)$ nehmen wir ein Viertel der Höchstgeschwindigkeit der *Aerobee* an, rund ein Viertel von 7 400 km h^{-1}.

Lösung: Der Ansatz (27) erfüllt die hier nicht zutreffende Anfangsbedingung $v(0) = 0$. Zu diesem Ansatz addieren wir eine noch zu bestimmende Konstante C. Der abgeänderte Ansatz erfüllt ebenso wie der ursprüngliche Ansatz die Differentialgleichung (26), denn die Konstante verschwindet beim Differenzieren; aber der abgeänderte Ansatz erfüllt Gl. (26) zu jeder beliebigen Anfangsbedingung, weil wir die Konstante C jeder Anfangsbedingung anpassen können:

Abgeänderter Ansatz:

$$v(t) \;=\; -\, c_{\text{eff}} \cdot \ln\left(\frac{M(t)}{M_0} \right) -\; g \cdot t \;+\; C \quad .$$

Verifikation:

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\, c_{\text{eff}} \cdot \frac{1}{\frac{M(t)}{M_0}} \cdot \frac{d\frac{M(t)}{M_0}}{dt} \;-\; g \quad .$$

Die nachträglich dazugegebene Integrationskonstante C setzen wir so fest, dass die neue Anfangsbedingung erfüllt ist: Wir setzen $t = 0$ in den neuen Ansatz für die Zeit ein, zu der sich die Feststoffrakete von der *Aerobee* getrennt hat, und kürzen ab $v(0) = v_0$. So erhalten für die noch offene Konstante C die Gleichung $v_0 = -c_{\text{eff}} \cdot \ln(M_0/M_0) - g \cdot 0 + C$, kurz $C = v_0$. Also

$$\boxed{\quad v(t) \;=\; -\,c_{\text{eff}} \cdot \ln\left(\frac{M(t)}{M_0}\right) -\; g \cdot t \;+\; v_0 \quad} \quad . \tag{31}$$

Achtung: $t = 0$ ist hier die Zeit, da sich Starthilfe und *Aerobee* trennen!

Nach Gl. (31) können wir also die Geschwindigkeit der *Aerobee* zu jedem Zeitpunkt zwischen der Trennung der Starthilfe und dem Brennschluss berechnen. □

Am stärksten interessiert uns der Extremwert, das Maximum der Geschwindigkeit am Ende der Brennzeit, die *Brennschlussgeschwindigkeit.*

9.1.2 Konkrete Werte: Effektive Strahlgeschwindigkeit, Durchsatz, Brennschlussgeschwindigkeit

Um die Brennschlussgeschwindigkeit nach Gl. (31) zu berechnen, brauchen wir außer der Raketengeschwindigkeit v_0 zur Zeit der Abtrennung der Starthilfe (die uns Gartmann explizit angegeben hat): die effektive Strahlgeschwindigkeit c_{eff}, die Masse M_0 der Rakete zur Zeit der Trennung und die Brennschlussmasse M_1 (drei Parameterwerte, die uns Gartmann nur implizit angegeben hat). Denn bei ihm finden wir den Schub F_{Schub} des (eigenen) Raketentriebwerks, dessen spezifischen Impuls I_{sp}, die Startmasse M_{Start} der *Aerobee* (ohne Starthilfe) und die Brennzeit $(t_{\text{Brennschluss}} - t_{\text{Start}})$.

Definition als Hinweis: Der *spezifische Impuls* ist definiert als Verhältnis der (effektiven) Strahlgeschwindigkeit zur Erdbeschleunigung, kurz $I_{\text{sp}} := c_{\text{eff}}/g$.

Vorschlag: Überlegen Sie sich, wie Sie aus diesen vier Gegebenheiten F_{Schub}, I_{sp}, M_{Start}, $(t_{\text{Brennschluss}} - t_{\text{Start}})$ die für die Rechnung nötigen Parameter c_{eff}, M_0, M_1 bestimmen können!

Vorschlag: Berechnen Sie zuerst die effektive Strahlgeschwindigkeit und den Massendurchsatz der *Aerobee* aus den folgenden Gegebenheiten (zum Startbeispiel vom 29. Juni 1956)!

Gegeben: der spezifische Impuls $I_{\text{sp}} = 200\ \text{s}$; der Schub des Raketentriebwerks $F_{\text{Schub}} = 1860\ \text{kg} \cdot g$; die mittlere Erdbeschleunigung: $g = 9,81\ \text{m s}^{-2}$.

Gesucht: die effektive Strahlgeschwindigkeit c_{eff} und der Massendurchsatz μ.

Grundgleichungen: $I_{\text{sp}} := c_{\text{eff}}/g$ (nach Definition des spezifischen Impulses I_{sp}, s. o.); $F =: c_{\text{eff}} \cdot \mu$ (so ist die *effektive* Strahlgeschwindigkeit c_{eff} definiert).

Lösung: Allgemein erhalten wir für die effektive Strahlgeschwindigkeit

$$\boxed{c_{\text{eff}} \;=\; g \cdot I_{\text{sp}}} \quad ,$$

also speziell zu den Gegebenheiten der *Aerobee*:

$$\boxed{c_{\text{eff}} \;=\; 1\,962 \text{ m s}^{-1}} \quad .$$

Aus der zweiten Grundgleichung dieser Aufgabe erhalten wir

$$\boxed{\mu \;=\; \frac{F_{\text{Schub}}}{c_{\text{eff}}}} \quad ,$$

konkret

$$\mu = \frac{1\,860 \text{ kg} \;\cdot\; g}{g \;\cdot\; 200 \text{ s}} \quad ;$$

$$\boxed{\mu \;=\; 9,3 \text{ kg s}^{-1}} \quad . \quad \square$$

<u>**Vorschlag:**</u> Berechnen Sie nun die in den Tanks der Rakete befindlichen Treibstoffmassen zur Startzeit $t_{\text{Start}} = -2,5$ s und zur Zeit $t = 0$ der Abtrennung der Starthilfe!

Gegeben: die gesamte Brennzeit $t_{\text{Brennschluss}} - t_{\text{Start}} = 50,6$ s ; die Dauer der Starthilfe $(t_{\text{Trennung}} - t_{\text{Start}}) = 2,5$ s ; und der Durchsatz $\mu = 9,3 \text{ kg s}^{-1}$.

Gesucht: die Treibstoffmassen $M_{\text{Treibstoff}}(-2,5 \text{ s})$ und $M_{\text{Treibstoff}}(0)$.

Grundgleichungen: Die seit dem Start von der *Aerobee* selbst verbrauchte Treibstoffmasse ist das Produkt des Durchsatzes μ und der Brennzeit $(t_1 - t_{\text{Start}})$, kurz: $M_{\text{Gesamttreibstoff}} = \mu \;\cdot\; (t_1 \;-\; t_{\text{Start}})$; sie befand sich zur Startzeit in der Rakete: $M_{\text{Treibstoff}}(-2,5 \text{ s}) = M_{\text{Gesamttreibstoff}}$.

Lösung: Einsetzen der Gegebenheiten in die Grundgleichungen führt auf die Gleichungen:

$$M_{\text{Treibstoff}}(-2,5 \text{ s}) = 9,3 \text{ kg s}^{-1} \cdot 50,6 \text{ s} \quad ;$$

$$M_{\text{Treibstoff}}(0) = 9,3 \text{ kg s}^{-1} \cdot (50,6 \text{ s} \;-\; 2,5 \text{ s}) \quad ;$$

$$\boxed{M_{\text{Treibstoff}}(-2,5\ \text{s}) = 470,6\ \text{kg}} \quad ; \tag{32}$$

$$\boxed{M_{\text{Treibstoff}}(0) = 447,3\ \text{kg}} \quad . \tag{33}$$

Ich rundete die Ergebnisse auf Zehntelkilogramm, weil ich nicht übertrieben genau sein wollte: manche Gegebenheiten dürften stärker gerundet sein! □

<u>**Vorschlag:**</u> Nach diesen Vorbereitungen sollte es Ihnen leichtfallen, die Brennschlussgeschwindigkeit der *Aerobee* zu berechnen. Versuchen Sie es!

Gegeben: die Geschwindigkeit zur Zeit null: $v_0 = (1/4) \cdot 7\,400\ \text{km h}^{-1}$; die effektive Strahlgeschwindigkeit $c_{\text{eff}} = 1\,850\ \text{km h}^{-1}$; die Startmasse der *Aerobee* (ohne Starthilfe): $M(-2,5\ \text{s}) = 680\ \text{kg}$ ([61], S. 123); die Treibstoffmassen an Bord der *Aerobee* zur Startzeit und zur Zeit $t = 0$: $M_{\text{Treibstoff}}(-2,5\ \text{s}) = 470,6\ \text{kg}$; $M_{\text{Treibstoff}}(0) = 447,3\ \text{kg}$; die mittlere Erdbeschleunigung $g = 9,81\ \text{m s}^{-2}$; die Brennzeit nach Trennung von der Starthilfe $t_1 = 50,6\ \text{s} - 2,5\ \text{s}$.

Gesucht: die Brennschlussgeschwindigkeit v_1 der *Aerobee*.

Grundgleichung: $v_1 = -c_{\text{eff}} \cdot \ln(M_1/M_0) - g \cdot t_1 + v_0$, siehe Gl. (31).

Lösung: Auf der rechten Seite der Grundgleichung stehen drei Terme. In sie setzen wir die Gebenheiten ein:

$$c_{\text{eff}} \cdot \ln\left(\frac{M_0}{M_1}\right) = 1\,962\ \text{m s}^{-1} \cdot \ln\left(\frac{680\ \text{kg} - 470,6\ \text{kg} + 447,3\ \text{kg}}{680\ \text{kg} - 470,6\ \text{kg}}\right) \quad ;$$

$$-g \cdot t_1 = -9,81\ \text{m s}^{-2} \cdot (50,6\ \text{s} - 2,5\ \text{s}) \quad ;$$

$$v_0 = 1\,850\ \text{km h}^{-1} \quad .$$

Also

$$v_1 = 2\,242,5\ \text{m s}^{-1} - 471,9\ \text{m s}^{-1} + 513,9\ \text{m s}^{-1} \quad ;$$

$$\boxed{v_1 = 2\,285\ \text{m s}^{-1}} \quad . \quad \square$$

Vergleich mit der Wirklichkeit: Gartmann gibt als „Höchstgeschwindigkeit" $7\,400\ \text{km h}^{-1}$ an, das sind $2\,056\ \text{m s}^{-1}$; also $229\ \text{m s}^{-1}$ weniger, als wir erhalten hatten!

Anschlussfrage: Wie erklären Sie sich, dass die Brennschlussgeschwindigkeit unserer Modellrechnung zu groß ist (um etwa zehn Prozent zu groß)?

Antwort: Wir mussten von vornherein erwarten, für jede Zeit eine zu große Geschwindigkeit zu erhalten, also auch für die Zeit des Brennschlusses. Denn wir hatten, um leichter rechnen zu können, eine nachweisbare Kraft auf die Rakete vernachlässigt: den *Luftwiderstand*, die *Reibungskraft* der Luft, die der Geschwindigkeit genau entgegengesetzt ist.

Sicher war die *Aerobee* (wie jede Rakete) so gebaut, dass sie der Luft möglichst wenig Widerstand bot, aber ganz ausschalten ließ sich der Luftwiderstand nicht, natürlich nicht. Es erscheint mir plausibel, dass die *Aerobee* infolge der Reibung an Luft zehn Prozent der Geschwindigkeit verlor.

Allerdings ist der *Reibungsverlust*, den wir für die Geschwindigkeit der *Aerobee* erhalten haben, etwas größer als die in der Literatur genannten *Reibungsverluste*: "The drag velocity loss $\Delta_{\mathrm{D}}V$ is about 200 m/sec for large vehicles and is built up during the first hundred seconds or so of flight" ([28], p. 59). Eine große Rakete,"a large vehicle", ist selbst die größere Version der *Aerobee* nicht: sie hat nur eine Länge von 7,19 m und einen Durchmesser von 0,38 m ([61], p. 123)!

„Überwiegender Anteil der Verluste kommt von Gravitation; Luftwiderstandsverluste betragen bei Raketen mit steiler Aufstiegsbahn und heute üblicher Form nur etwa 160 m/sec“ ([31], S. 85). Diese „Stichworte“ hat Elsner Anfang der siebziger Jahre geschrieben, sie gelten also nicht für die 1946 entwickelte Rakete.

Der relativ hohe Wert des Luftwiderstandsverlustes leuchtet mir ein, weil der Anfangswert der Geschwindigkeit so hoch ist: Die Starthilfe brachte die *Aerobee* schon 42 Meter über dem Starttisch – wo die Dichte der Luft noch nicht spürbar abgefallen ist – auf eine Geschwindigkeit von $1\,850 \text{ km h}^{-1} = 514 \text{ m s}^{-1}$, also auf 1,6fache Schallgeschwindigkeit!

9.2 Die Bewegung nach der Starthilfe

9.2.1 Eine neue Anfangsbedingung für die Bewegung

Im Abschnitt 8.3 beschrieben wir die Bewegung einer senkrecht aufsteigenden Rakete als Lösung der Differentialgleichung (28), dort wollten wir das einfache Problem einer Rakete ohne Starthilfe lösen: einer Rakete, die aus der Ruhe heraus vom Starttisch abhob, also ein Bewegungsproblem mit den Anfangsbedingungen $v(0) = 0$ und $x(0) = 0$. Das erste Integral nach Gl. (28) erfüllte die erste dieser Anfangsbedingungen und seine Lösung nach Gl. (30) alle beide.

Wenn wir den Aufstieg der *Aerobee* berechnen wollen, müssen wir von anderen Anfangsbedingungen ausgehen. Die Bedingung $v(0) =: v_0 = 1\,850 \,\text{km}\,\text{h}^{-1}$ für die Geschwindigkeit hatten wir bei der Aufstellung der Differentialgleichung (31) für die Geschwindigkeit der *Aerobee* berücksichtigt; wenn wir nun ihre Höhe als Funktion der Zeit berechnen wollen, müssen wir entsprechend berücksichtigen, dass sich die *Aerobee* zur Zeit $t = 0$, als sich die Starthilfe soeben von ihr abgetrennt hatte, 42 m über dem Starttisch befand.

Vorschlag: Berechnen Sie die Bewegung der *Aerobee* (die Höhe der Rakete als Funktion der Zeit), indem Sie die Differentialgleichung (31) unter der Anfangsbedingung $x(0) =: x_0 = 42\,\mathrm{m}$ lösen (so wie ich Gartmanns diesbezügliche Textstelle verstehe)!

Empfehlung: Fassen Sie diesen Vorschlag als Anschlussaufgabe an die Lösung des Bewegungsproblems der Rakete ohne Starthilfe auf [siehe Abschnitt 8.3]!

Gegeben: die effektive Strahlgeschwindigkeit c_{eff}, die Anfangsmasse M_0, der Durchsatz μ, die Erdbeschleunigung g und die Anfangsbedingungen der *Aerobee*: ihre Anfangsgeschwindigkeit v_0 und Anfangshöhe x_0: alle Größen als Parameter.

Gesucht: der Funktionsterm $x(t)$ für die Höhe.

Grundgleichung: $dx(t)/dt = -c_{\text{eff}} \cdot \ln(1 - \mu \cdot t/M_0) - g \cdot t + v_0$, Gl. (31).

Lösung: Gl. (31) unterscheidet sich nur in dem zusätzlichen Term v_0 von Gl. (27), der entsprechenden Differentialgleichung der Rakete ohne Starthilfe (für die Rakete ohne Starthilfe gilt $v_0 = 0$). Darum können wir die *allgemeine* Lösung (29) der Differentialgleichung (27) aus dem Abschnitt 8.3 übernehmen – mit zwei Abänderungen: Erstens addieren wir zur Lösung (29) den Term $v_0 \cdot t$; und zweitens legen wir das konstante Glied C der Lösung (29) so fest, dass unsere Lösung $x(t)$ die Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ erfüllt.

Das läuft darauf hinaus, dass wir zur speziellen Lösung (30) der Differentialgleichung (27) der Rakete ohne Starthilfe die Termsumme $v_0 \cdot t + x_0$ addieren. Um sicher zu gehen, fassen wir den so abgeänderten Funktionsterm $x(t)$ als Ansatz auf, den wir noch zu verifizieren haben.

Ansatz:

$$x(t) = c_{\text{eff}} \cdot \frac{M_0}{\mu}\left(1 - \frac{\mu \cdot t}{M_0}\right) \cdot \ln\left(1 - \frac{\mu \cdot t}{M_0}\right) + c_{\text{eff}} \cdot t - \frac{1}{2} g\, t^2 + v_0 \cdot t + x_0 \quad .$$

Verifikation: Wir differenzieren beide Seiten des Ansatzes nach der Zeit t,

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= c_{\text{eff}} \cdot \frac{M_0}{\mu} \cdot \left(-\frac{\mu}{M_0}\right) \cdot \ln\left(1 - \frac{\mu \cdot t}{M_0}\right) \\ &\quad + c_{\text{eff}} \cdot \frac{M_0}{\mu} \cdot \left(1 - \frac{\mu \cdot t}{M_0}\right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{\mu \cdot t}{M_0}} \cdot \left(-\frac{\mu}{M_0}\right) + c_{\text{eff}} - g \cdot t + v_0 \quad , \end{aligned}$$

und erhalten

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\, c_{\text{eff}} \cdot \ln\left(1 - \frac{\mu \cdot t}{M_0}\right) - g \cdot t + v_0 \quad .$$

Der Ansatz löst also die Differentialgleichung (31).

Zum Schluss vergewissern wir uns, ob der Ansatz die Anfangsbedingung der *Aerobee* erfüllt. Wir setzen auf beiden Seiten des Ansatzes $t = 0$ ein und erhalten $x(0) = c_{\text{eff}} \cdot (M_0/\mu) \cdot \ln(1) + 0 - 0 + 0 + x_0$. Das ist die richtige Anfangsbedingung, die Welt ist in Ordnung, es gilt also:

$$\boxed{x(t) = \frac{c_{\text{eff}} \cdot M(t)}{\mu} \cdot \ln\left(\frac{M(t)}{M_0}\right) - \frac{1}{2} g\, t^2 + (c_{\text{eff}} + v_0) \cdot t + x_0} \quad , \tag{34}$$

wobei

$$M(t) = M_0 - \mu \cdot t \quad .$$

Nach Gl. (34) können wir die Höhe der *Aerobee* zu jedem Zeitpunkt zwischen der Abtrennung von der Starthilfe und dem Brennschluss berechnen. □

Am stärksten interessiert uns natürlich die Steighöhe der Rakete, und um sie zu berechnen, brauchen wir die Höhe am Ende der Beschleunigungsphase, die *Brennschlusshöhe*.

9.2.2 Konkrete Werte: Brennschlusshöhe und Steighöhe

Vorschlag: Berechnen Sie zunächst die Brennschlusshöhe der *Aerobee*!

Gegeben: die effektive Strahlgeschwindigkeit $c_{\text{eff}} = 1\,962 \text{ m s}^{-1}$; die Brennschlussmasse $M_1 = 209,4 \text{ kg}$; der Durchsatz $\mu = 9,3 \text{ kg s}^{-1}$; die Masse $M_0 = 656,7 \text{ kg}$ zur Zeit $t = 0$ [s. Abschnitt 9.1.2]; die Erdbeschleunigung $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$; die Brenndauer (gerechnet ab $t = 0$) : $t_1 = 48,1 \text{ s}$; die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 1\,850 \text{ km h}^{-1}$ und die Anfangshöhe $x_0 = 42 \text{ m}$ [siehe Abschnitt 9.1.1].

Gesucht: die Brennschlusshöhe x_1 der *Aerobee*.

Grundgleichung: $x_1 = (c_{\text{eff}} \cdot M_1/\mu) \cdot \ln(M_1/M_0) - (1/2) \cdot g \cdot t_1^2 + (c_{\text{eff}} + v_0) \cdot t_1 + x_0$, s. Gl. (34).

Lösung: Setzen wir die Ergebnisse für die vier Terme ein, so erhalten wir

$$x_1 = 44\,177 \text{ m} \; - 11\,348 \text{ m} \; + 119\,090 \text{ m} \; + 42 \text{ m} \; ;$$

und als Summe

$$\boxed{x_1 = 152,0 \text{ km}} \quad . \tag{35}$$

Überleitung zum nächsten Vorschlag: Leider können wir diesen Wert nicht mit dem wirklichen Wert vergleichen, Gartmann gibt die Brennschlusshöhe nicht an. Aber aus der Brennschlussgeschwindigkeit und der Brennschlusshöhe können wir die Steighöhe der Rakete ausrechnen und unseren Wert für die Steighöhe mit der erreichten „Maximalhöhe“ von 262 km vergleichen ([61], S. 123).

Vorschlag: Rechnen Sie aus, wie hoch die *Aerobee* nach ihrem Brennschluss gestiegen wäre, wenn unsere Werte für die Brennschlussgeschwindigkeit und die Brennschlusshöhe gestimmt hätten!

Empfehlung: Tun Sie so, als wäre die Erdbeschleunigung homogen, und rechnen Sie zunächst mit dem an der Erdoberfläche gültigen Wert von 9,81 m s^{-2}!

Gegeben: die Brennschlussgeschwindigkeit $v_1 = 2\,285$ m s^{-1}, die Brennschlusshöhe $x_1 = 152,0$ km und die Erdbeschleunigung $g = 9{,}81$ m s^{-2}.

Gesucht: die Steighöhe $x_{\max}$ der *Aerobee.*

Grundgleichungen: Die Summe der kinetischen Energie E_{kin} und der potentiellen Energie E_{pot} eines konservativen Systems ist konstant (der Energiesatz):

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = E_{\text{gesamt}} \quad ,$$

konkret für den senkrechten Wurf aufwärts in einem homogenen Schwerefeld:

$$\frac{1}{2}\, M\, v^2 + M\, g\, x = \text{constans} \quad .$$

Lösung: Im höchsten Punkt seiner Bahn hat der aufwärts geworfene Körper keine Geschwindigkeit, keine kinetische Energie mehr:

$$\frac{1}{2}\, M\, v_1^2 + M\, g\, x_1 = M\, g\, x_{\max} \quad ,$$

also gilt:

$$\boxed{x_{\max} \;=\; x_1 \;+\; \frac{v_1^2}{2\,g}} \quad .$$

Aus den Gegebenheiten erhalten wir konkret

$$x_{\max} \;=\; 152,0 \text{ km} \;+\; \frac{(2\,285 \text{ m s}^{-1})^2}{2 \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2}} \quad ; \tag{36}$$

$$\boxed{x_{\max} \;=\; 418,1 \text{ km}} \quad . \tag{37}$$

Fehlerdiskussion: Unser Ergebnis für die Steighöhe ist um 156 km zu groß, der relative Fehler beträgt (418 km – 262 km)/262 km = 60 %. Das ist deutlich mehr als die 10 %, um die unser Ergebnis für die Brennschlussgeschwindigkeit zu groß war [s. „Vergleich mit der Wirklichkeit“ am Schluss des Abschnitts 9.1.2].

Sehen wir uns das Zwischenergebnis der Gl. (36) an, so erkennen wir, dass die Brennschlussgeschwindigkeit quadratisch in das Ergebnis eingeht. Damit erklären sich 20 % des Fehlers; die restlichen 40 % müssen sich also als Fehler der Brennschlusshöhe in den Fehler der Steighöhe fortgepflanzt haben.

In Wirklichkeit ist der Fehler der Brennschlusshöhe noch etwas größer: denn hätten wir mit einem kleineren Wert der Erdbeschleunigung gerechnet, dann wäre unser Ergebnis für die Steighöhe um ein paar Prozent größer ausgefallen!

10 Schluss: Das Lösen physikalischer Probleme

Lieber Physik-Fan, mit diesen Rechnungen wollte ich Ihnen nicht nur Raketendynamik vermitteln oder Ihnen zeigen, dass ein Verständnis der Differentialrechnung genügt, um einige Differentialgleichungen zu „integrieren“ und ein konkretes Problem der angewandten Physik zu lösen. Noch mehr lag mir daran, Ihnen zu zeigen, wie Sie am besten an ein physikalisches Problem herangehen:

Versuchen Sie nicht, ein physikalisches Problem, von dessen Lösung Sie noch keine Ahnung haben, sofort in seiner vollen Pracht und Herrlichkeit anzugehen! Nein, nähern Sie sich zuerst seinen kleinen Verwandten: *Beginnen Sie mit einfachen ähnlichen Problemen!* Wheeler sagte einmal: „Rechnen Sie das Problem durch, bevor Sie es durchrechnen!“ Anders gesagt, fangen Sie mit einem *Spielzeugmodell* an, einem leichten Spezialfall, auch wenn die Wirklichkeit schwer ist, ja besonders dann! und reizen Sie das Modell aus.

Wir begannen mit der *kräftefreien* Rakete. – Aber nur im interstellaren Raum wäre eine Rakete so gut wie kräftefrei. – Na und? Dann ist unsere Rakete im interstellaren Raum; gut, dass es ihn gibt! – Aber im interstellaren Raum hätte die Rakete ihre chemischen Treibstoffe schnell verbraucht. – Richtig, und? Dann hat unsere interstellare Rakete eben einen Kernantrieb wie die *Daedalus*, an der die besten Ingenieure der British Interplanetary Society fünf Jahre lang gearbeitet hatten. – Aber die Geschwindigkeit der *Daedalus* wäre nach jahrelangem Antrieb relativistisch. – Na und? Dann fassen wir unser Spielzeugmodell auch als Vorbereitung auf die Bewegung der *Daedalus* auf.

Ja, Sie könnten die relativistische Bewegung der Rakete anschließend an die nichtrelativistische Bewegung studieren – vorausgesetzt, Sie haben sich etwas Spezielle Relativitätstheorie angeeignet. Das könnten Sie mit der Mathematik des elften Schuljahrs ohne weiteres, vielleicht hänge ich bald eine Handreichung dazu an unsere Website.

Suchen Sie, wo es geht, *verschiedene Wege zum Ziel!* Oft finden Sie, nachdem Sie Ihr Ziel mühsam auf Umwegen erreicht haben, einen leichten schönen Weg: er gibt Ihnen zusätzliche Einsichten. Machen Sie, wo Sie nur können, eine Probe, besonders wenn Sie allein rechnen. Und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit denen in der Literatur! So sichern Sie sich gegen Fehler ab: „Vorm Böckeschießen bewahrt uns nur der Tod.“ [Albert Einstein]

Und rechnen Sie *so einfach wie möglich weiter!* Nehmen Sie sich nach dem ersten Spielzeugmodell das zweite vor, es darf der Wirklichkeit etwas näher sein. Unser zweites Spielzeugmodell war der *senkrechte Aufstieg der Rakete im homogenen Schwerefeld*. Das Schwerefeld der Erde ist nicht homogen. – Na und? Auf den ersten zurückgelegten Kilometern spielt der Unterschied keine Rolle. Wollen sie den Fehler abschätzen?

Ein Vorschlag zum Schluss: Überschlagen Sie im Kopf, um wieviel Prozent sich die Erdbeschleunigung in 64 km Höhe von der am Erdboden unterscheidet!

Hinweis: 64 km sind ein Prozent von 6 400 km, dem Erdradius.

Empfehlung: Kombinieren Sie das newtonsche Gravitationsgesetz mit der newtonschen binomischen Reihe!

Lösung: Die Erdbeschleunigung in 64 km Höhe ist um zwei Prozent kleiner als am Meeresspiegel – um poplige zwei Prozent.

Aber wir haben die Luftreibung vernachlässigt. – Richtig. Doch wollten wir sie in unseren Rechnungen berücksichtigen, müssten wir einen Aufwand treiben, der uns anderswo nicht so schnell zugute käme. (Anders verhält es sich mit dem Ausprobieren von Ansätzen: auf die Weise können Sie viele physikalische Probleme in den Griff bekommen!)

Noch etwas: Die meisten Raketen bewegen sich nur anfangs in der Senkrechten; sie schwenken bald in eine Bahn ein, die für ihre Mission die günstigste ist, und das ist eben nicht die Senkrechte. – Auch wahr. Welche Bahn und welche Bewegung die günstigste für eine gegebene Mission ist, können Sie an der Schule leider nicht lernen: Für das Aufstellen der Bewegungsgleichungen einer Rakete im (kugelsymmetrischen) Schwerefeld eines Himmelskörpers bräuchten Sie den *Lagrange-Formalismus* des Bewegungsproblems in Kugelkoordinaten. Aber wer weiß, vielleicht studieren Sie noch Astronautik oder Physik ...

Danksagungen

„Handreichung 27“ entstand in der Arbeit mit der „Faszination Physik“, einem von DESY geförderten „Gesprächskreis für junge Leute“ – dafür ein herzliches Dankeschön an DESY! Besonders bedanke ich mich bei Herrn Krech, der immer Zeit für uns gehabt hat, und bei Frau Lehmann, die mit Geschmack die erste Fassung unserer Website in HTML umgesetzt hatte.

Herrn Mais danke ich für unzählige anregende Diskussionen, sein Interesse am Fortgang dieser Arbeit – und die Bücher über Raketen und Raumfahrt, die er mir geschenkt hat! Ohne den „geschichtlichen Rückblick“ Stemmers [20], ohne Gartmanns Beschreibung der *Aerobee* [61] hätte der Handreichung etwas gefehlt. Wiederholt half Herr Mais unserer Arbeitsgemeinschaft bei der Literatursuche; und von sich aus machte er uns immer wieder auf Publikationen aufmerksam – und auf Fundgruben in Websites! Auch den Hinweis auf die lustige Raketenaufgabe in der Aufgabensammlung von Gnädig, Honyek und Riley [33] verdanken wir Herrn Mais.

Es geht nicht an, hier alle jungen Leute aufzuzählen, die den Charakter und die Leistungen der „Faszination Physik“ bestimmt haben und denen ich für ihren Einsatz danken möchte; aber einen Namen muss ich nennen: Wir alle, mich eingeschlossen, sind Christoph Bergemann tief verpflichtet: er hat uns als Webmaster viele Tage und viele Stunden seiner kostbaren Zeit geschenkt. Wählen Sie http://www.desy.de/faszination.physik und genießen Sie die gute Laune!

Das Thema der Raketenbewegung verdanken wir Patrick Vidal (als er es der Arbeitsgemeinschaft vorschlug, war er noch vierzehn Jahre alt, Achtklässler und schon ein dreiviertel Jahr bei uns – unser Jüngster).

Und ich danke den Gründern und Trägern der *Hamburger Raumfahrtgespräche*: Hans Beusse, Helmut Menke (dessen Verscheiden ein schwerer Verlust für uns und die Raumfahrtgespräche war), Hans Jürgen Müller und Jürgen Schulz. In lebhaften Gesprächen mit ihnen lernte ich die Denkweise erfahrener Ingenieure kennen und gewann ein Gefühl für Raketen.

Last but not least bedanke ich mich bei den Experten des *User Consulting Office* im Rechenzentrum von DESY-Hamburg: Anfangs halfen sie mir, mich auf der ungewohnten UNIX-Plattform zurechtzufinden, und danach, LaTeX mit List und Gewalt zu überreden, das zu drucken, was ich mir vorgenommen hatte. Ich weiß nicht, was ich ohne die freundlichen Ratgeber gemacht hätte.

Literatur

[1] Ruppe, Harry O. : *Die grenzenlose Dimension – Raumfahrt –, Band 1: Chancen und Probleme*, 1980, 736 Seiten; *Band 2: Werkzeuge und Welt*, 776 Seiten; Econ Verlag, Düsseldorf, 1982.

Die beiden Bände dieses allgemeinverständlichen Sachbuchs haben also zusammen über 1500 Seiten. Immer wieder blättere ich in ihnen, sie haben mit den Jahren nichts von ihrem Charme verloren. Die drei im Hauptabschnitt 6 durchgerechneten Raketenaufgaben habe ich diesem Buch entnommen!

[2] Sänger, Eugen: *Raumfahrt heute – morgen – übermorgen.* Econ-Verlag, Düsseldorf, 1963

Wenn Sie das Buch irgendwo im Antiquariat sehen, und Sie haben das nötige Kleingeld, dann greifen Sie zu! Und wenn Sie das Buch schon besitzen und es noch einmal erwerben, könnten Sie jemand anderem eine große Freude machen. Genau das hat ein Freund von mir getan – und es mir zum Geburtstag geschenkt.

Schulbücher zur Raketenphysik oder Raumfahrt:

[3] Müller-Arnke, Hanne: *Gravitation und Weltraumfahrt. Grundkurs,* 2. Auflage. J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart, 1984, 112 S. (die Raketengrundgleichung wird hier nicht hergeleitet, sondern nur mitgeteilt, und mit ihr wird gerechnet: auf S. 80–82)

[4] Linckens, Paul Heinz: *Der Raketenantrieb als Unterrichtsgegenstand der Sekundarstufe I*, aus der Schriftenreihe UNTERRICHTSHILFEN NATURWISSENSCHAFTEN. Aulis Verlag Deubner & Co KG, Köln, 1974

Das Buch habe ich in der Hamburger Lehrerbibliothek (Felix-Dahn-Str. 3), der Bibliothek des Instituts für Lehrerfortbildung und des Staatlichen Studienseminars, gefunden. Es wendet sich als Band der Reihe „Unterrichtshilfen“ an die Lehrenden, nicht die Lernenden, und geht darum weiter als das für die Lernenden der Oberstufe geschriebene Büchlein von Hanne Müller-Arnke. So könnte der lesende Fan die Herleitung der Raketengrundgleichung ausführlich und genüsslich auf zweieinhalb Seiten nachvollziehen – wäre sie einwandfrei: Eine inkorrekte Begründung und der eine und der andere Formfehler entstellen die Rechnung.

Schulbücher mit etwas Raketenphysik:

Mit den folgenden drei Titeln habe ich die mir zugänglichen deutschen Lehrbücher für die Oberstufe (die „Sekundarstufe II“) aufgezählt, in denen die Grundgleichung der Raketenbewegung, die Tsiolkovsky-Formel, *hergeleitet* wird. Im vierten Buch wird immerhin die Bewegungsgleichung der Rakete hergeleitet; und im fünften Buch wird eine Fußballblase als Rakete durchgerechnet.

Die Liste ist sicher nicht vollständig, ich ergänze sie aber gerne. Die Bücher, in denen die Tsiolkovsky-Formel hergeleitet wird (davon ist eines die Überarbeitung eines Buchs der Liste), setzen in ihrer Herleitung die *Integralrechnung* voraus.

[5] Höfling, Oskar: *Physik. Lehrbuch für Unterricht und Selbststudium*, 11. Auflage, bearbeitet von Dr. Oskar Höfling, Bernd Mirow und Gerhard Becker. Ferd. Dümmler Verlag, 1976 (S. 178–184)

Ausführlich behandelt nur der *Höfling* die Bewegung der Rakete (von allen mir bekannten Schulbüchern). Er wird seinem Anspruch gerecht, ein Lehrbuch zum *Selbststudium* zu sein. Doch trübt ein Formfehler die Lesefreude: Höfling bedenkt nicht, dass die Masse eine Maßeinheit hat, und integriert den Kehrwert $1/M$ der Masse mit dem Ergebnis $ln(M)$. Er macht den Formfehler noch einmal: als Integrationskonstante erhält er $-ln(M_0)$, und das Endergebnis stimmt. Niemand scheint ihn gefragt zu haben, wie groß der Logarithmus von einem Kilogramm ist!

[6] Grehn, Joachim (Hg.), Albrecht von Hessberg, Hans-Gerd Holz, Joachim Krause, Herwig Krüger, Herbert Kurt Schmidt: *Metzler Physik*, 2. Auflage. J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart, 1988 (S. 98f.).

Der Gesamtband hat 576 Seiten. Das Buch ist eine Überarbeitung des *Vieweg Physik* [7] und dessen Vorgängers, des Brenneke/Schusters: *Physik für Gymnasien*. Es ist in der Physik ansprechend wie seine Vorgänger, im Ausdruck etwas genauer und im äußeren Erscheinungsbild, durch viele farbige Abbildungen, noch freundlicher.

[7] Grehn, Joachim (Hg.), Albrecht von Hessberg, Hans-Gerd Holz, Joachim Krause, Herwig Krüger, Herbert Kurt Schmidt, unter Mitwirkung der Verlagsredaktion Physik und Dipl. Phys. Carl-Christian Lommer, Peter Joachim Reichard: *Vieweg Physik für den kursorientierten Unterricht in der gymnasialen Oberstufe*. Schulverlag Vieweg, Düsseldorf, 1882, 531 Seiten (S. 99–101).

Wenn Ihnen das Buch antiquarisch günstig angeboten wird, greifen Sie zu: Es ist immer noch ein gutes Schulbuch.

[8] Bodemann, Gerhard, Hans-Ulrich Firnhaber, Hans-Werner Kirchhoff, Johannes Opladen, Martin Otter, Hermann Ruoss, Rolf Peter Schloot, Werner Schmidt, unter Mitarbeit von Hans-Jürgen Stein und der Verlagsredaktion Physik: *GROSS-BERHAG mechanik*. Ernst Klett, Stuttgart, 1980 (S. 85)

[9] Dorn, Friedrich, (Hg.) und Franz Bader (Hg.); bearbeitet von: Bader, Bergold, Dorn, Heise, Kraemer, Lefrank †, Raith, Umland, Zeier: *Dorn · Bader Physik. Oberstufe. Band MS* [<u>M</u>echanik und <u>S</u>chwingungen]. Hermann Schroedel Verlag KG, Hannover, 1975 (S. 104f.)

Enzyklopädien mit Herleitungen der Tsiolkovsky-Formel:

Von den mir zugänglichen Enzyklopädien zähle ich nur diejenigen auf, in deren Einträgen die Tsiolkovsky-Formel *hergeleitet* wird, wenn auch nur kurz (ich ergänze die Liste gerne):

[10] Marc, Hans: “Space Exploration” in Trigg, George L., Herausgeber: *Encyclopedia of Applied Physics*, Volume 19. Wiley-VCH (Verlag Chemie!), Inc. , New York, Weinheim, Cambridge (United Kingdom), 1997 (pp. 86–88)

Lesen Sie unbedingt auch die lebendige historische Einleitung und Einführung (pp. 81–86)!

[11] *Brockhaus abc Physik*, 2. Auflage, Band 2, Herausgeber Richard Lenk, 1989 (S. 799f.: eine dreiviertel Seite im Kleindruck; der Eintrag der 1. Auflage wurde für die 2. Auflage gekürzt)

[12] *Hütte. Die Grundlagen der Ingenieurwissenschaften*, 29. Auflage, Herausgeber Horst Czichos, Springer-Verlag, Berlin 1989 (S. E 42)

[13] *Kleine Enzyklopädie Physik*, 2. Auflage, Herausgeber Peter Rennert u. a., Bibliographisches Institut, Leipzig, 1988 (S. 31)

Mindestens einen jungen Mann kenne ich, der auf diese kleine Enzyklopädie schwört, und mir gefällt sie auch: 727 Textseiten, übersichtlich gegliedert, von kompetenten Autoren und Herausgebern gut aufeinander abgestimmt.

[14] *The Encyclopedia of Physics*, 2nd Edition, Edited by Robert M. Besançon. Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1974 (pp. 66f.)

[15] *Brockhaus abc Physik*, 1. Auflage, Band 2, Herausgeber Walter Gellert, 1972 (S. 1262–1264: etwas über eine Seite im Kleindruck)

Enzyklopädien mit Einträgen zur Geschichte der Rakete:

[16] *Brockhaus Enzyklopädie in 24 Bänden*, 19. Auflage, 18. Band. F. A. Brockhaus, Mannheim, 1992 (S. 40)

[17] *The New Encyclopædia Britannica*, 15th Edition, Volume 10. Encyclopædia Britannica, Inc., Chicago, © 1974–1989 (p. 124)

Science Fiction zum 100jährigen Krieg:

[18] Simmons, Dan: *Hyperion*. Headline 1990, London; © 1989

Eine raffinierte Schachtelung von zunächst sieben, später noch mehr grundverschiedenen Lebensläufen in einer Rahmenhandlung; eine neue Art harter Science Fiction, verbunden mit schwarzem Horror: all das hat es mir angetan und noch viel mehr, was ich nicht benennen kann: Das Buch habe ich schon fünfmal im Ganzen gelesen und Teile daraus wie die Story von Merin und Siri noch öfter! Es gibt nur einen Roman, der mich vielleicht noch stärker fasziniert, nämlich Dan Simmons: *The Fall of Hyperion*.

[19] Crichton, Michael: *Timeline.* Alfred A. Knopf, New York, 1999

Zeitreisen ins Frankreich des 14. Jahrhunderts, dessen geschichtlichen Hintergrund Crichton genau recherchiert hat.

Zur Geschichte der Rakete – und der Mechanik:

[20] Stemmer, Josef (Ingenieur): *Raketenantriebe. Ihre Entwicklung, Anwendung und Zukunft.* Schweizer Druck- und Verlagshaus AG., Zürich, 1952

[21] Fierz, Markus: *Vorlesungen zur Entwicklungsgeschichte der Mechanik.* Springer-Verlag, Berlin, 1972 (*Lecture Notes in Physics*, Volume 15)

[22] Bader, Franz, (Hg.) und Friedrich Dorn † (Hg.); bearbeitet von: Franz Bader, Helmut Bergold, Peter Drehmann, Erwin-Klaus Haberkant, Bernd Kretschmer, Heinz-Werner Oberholz, Werner Wegner: *Dorn · Bader Physik. Ausgabe A · Gymnasium Sek II. 11.* Schroedel, Hannover, 1998, 192 S.

[23] Sambursky, Shmuel: *Der Weg der Physik. 2500 Jahre physikalischen Denkens. Texte von Anaximander bis Pauli.* Artemis Verlag, Zürich, 1975 (S. 303)

Die hier zitierten Textstellen stammen aus der deutschen Übersetzung Arthur von Oettingens, Leipzig 1890.

[24] Asimov, Isaac: *Biographische Enzyklopädie der Naturwissenschaften und der Technik*, 2. Auflage. Herder, Freiburg, 1974 (S. 117)

Asimov soll über 200 Bücher geschrieben haben, und manche nennen dieses hier sein bestes Buch. Mir ist es jedenfalls das wertvollste (zu zählen, wie viele seiner Bücher ich besitze, dürfte einige Zeit kosten).

[25] Mielke, Heinz: *Lexikon der Raumfahrt und der Weltraumforschung.* trans-press, Berlin, 1986

Mielke zeigt uns (auf S. 556) die Umschlagseite des Heftes 5 des Jahrgangs 1903 der russischen Zeitschrift, deren Namen wir mit *Wissenschaftliche Rundschau. Monatliche wissenschaftlich-philosophische und literarische Zeitschrift* übersetzen können (in diesem Heft 5/1903 hatte Tsiolkovsky seinen Artikel veröffentlicht). Mielke nennt auch den Titel der Arbeit in deutscher Übersetzung: „Erforschung des Weltraums mittels Reaktionsapparaten“. Gerne hätte ich eine Photokopie dieses Artikels.)

[26] Beusse, Hans, und Helmut Grawe, 1967: „Versuche zur Stufentrennung in einer evakuierten Prüfkammer [II. und III. Stufe ELDO A]“, *Raumfahrtforschung*, Band ???, Heft 3, Juli–September 1967 (S. ???–???)

[27] Ackeret, J.: „Zur Theorie der Raketen“, *Helvetica physica acta*, Volumen XIX, 1946, S. 103–112 (insbesondere S. 105–107)

Ein Lehrbuch der Astronautik:

[28] Ruppe, Harry O. : *Introduction to Astronautics.* Academic Press, New York; Volume 1, 1966, 565 pp. (pp. 22–26); Volume 2, 1967, 536 pp.

Das erste umfassende wissenschaftliche Lehrbuch der Astronautik (das übrigens auch ins Russische übersetzt wurde). Gucken Sie mal rein, es steht in der DESY-Bibliothek unter den Technik-Büchern [Signaturen: T Rup 1; T Rup 2].

Ein Lehrbuch der Mathematik:

[29] Courant, Richard, und Herbert Robbins: *Was ist Mathematik?* 3. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 1973

Das Buch ist eine ausgezeichnete Übersetzung (Dr. Iris Runge) der Originalausgabe *What is Mathematics?* Die Originalausgabe ist zwischen 1941 und 1973 in neun Auflagen erschienen, und ich weiß nicht wie oft danach.

Ein besonders schönes Physikbuch:

[30] Sexl, Roman, Ivo Raab, Ernst Streeruwitz: *Das mechanische Universum. Eine Einführung in die Physik, Band 1.* Die 2. Auflage wurde durchgesehen und bearbeitet von Ernst Hügli und Hans Roth. (Die Originalausgabe ist erschienen bei Verlag Carl Ueberreuter, Wien.) Verlag Moritz Diesterweg, Frankfurt am Main, und Verlag Sauerländer, Aarau, 1990. © 1980 der deutschen und schweizerischen Ausgabe (S. 214f.)

Die Tsiolkovsky-Formel wird hier nicht hergeleitet, doch finden Sie im Abschnitt „5. Der Raketenmotor“ eine Seite über den Wirkungsgrad der Rakete als Wärmekraftmaschine. Drei Universitästheoretiker aus Wien und Insbruck haben das Buch unter Mitwirkung eines Kernphysikers aus Frankfurt für die Schule geschrieben (für die Oberstufe, die Sekundarstufe II) – mit so viel Liebe, dass ich es allen Fans, die es vielleicht noch nicht kennen, empfehlen muss!

Ein Hochschullehrbuch zur Raumfahrt:

Hier nenne ich noch ein einschlägiges Hochschul-Lehrbuch der Raumfahrt – das Astronautik-Lehrbuch von Ruppe habe ich schon zitiert [28]:

[31] Elsner, Eckart: *Raumfahrt in Stichworten.* Verlag Ferdinand Hirt, Kiel, © 1973 (S. 86f.)

Ein nützliches Buch der Reihe *Hirts Stichwortbücher*: 270 Seiten, die es in sich haben: Es wird immer noch nachgedruckt!

Hochschullehrbücher, in denen die Raketendynamik behandelt wird:

Zum Schluss zähle ich *Hochschul*-Lehrbücher der experimentellen oder theoretischen Physik auf, die auf die Bewegung der Rakete eingehen. Die Liste ist sicher unvollständig: Ich ging die eigenen Bücher durch und eine Liste mit 135 Büchern der DESY-Bibliothek in Hamburg-Bahrenfeld, in deren Titel das Wort Mechanik vorkam – verzichtete also auf die englischsprachigen Titel. Hier ist die Statistik der Erfolgserlebnisse: Von den 135 Bänden muss ich die 59 Bände abziehen, die nicht am Platz standen oder von denen ich nicht erwarten konnte, dass sie auf die Raketenbewegung eingehen, wie z. B. *Statistische Mechanik*. Von den verbleibenden 76 Bänden behandeln 22 Bände die Raketenbewegung! Übrigens, wenn im Sachwortverzeichnis eines Lehrbuchs das Stichwort *Rakete* fehlt, könnte das Buch in dieser meiner Liste fehlen, auch wenn die Bewegungsgleichung in ihm hergeleitet würde! (Auch hier wäre ich für Hinweise zur Ergänzung meiner Liste dankbar.)

[32] Meschede, Dieter: *Gerthsen Physik*, zuvor bearbeitet von Helmut Vogel, 21. Auflage. Springer-Verlag, Berlin 2002 (S. 28 und Aufgaben auf S. 64, 138, 209f., 284 mit den Lösungen auf S. 1041, 1063, 1076)

Dieser Renner unter den Lehrbüchern hat nun (in seiner 21. Auflage) 1288 Seiten.

[33] Gnädig, Peter, Gyula Honyek, Kenneth F. Riley: *200 Puzzling Physics Problems*, 1st publication. Cambridge University Press, Cambridge, 2001 (pp. 4, 51, 82)

Wenn Sie meine „Handreichung 27“ durchgearbeitet haben, können Sie das "Puzzling Physics Problem 18" mit Gleichungen lösen. Die aufgegebene Lösung kommt aber ohne eine einzige Formel aus!

[34] Heinemann, Hilmar (Federführender), Heinz Krämer, Peter Müller, Hellmut Zimmer: *Physik in Aufgaben und Lösungen, Teil I: Mechanik – Schwingungen und Wellen*, 4. Auflage. Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag München, © 2001 (S. 72f.)

[35] Dorfmüller, Thomas, Wilhelm T. Hering, Klaus Stierstadt, unter Mitarbeit von Günther Fischer: *Bergmann · Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 1: Mechanik, Akustik, Wärme*, 11. Auflage. Walter de Gruyter, Berlin 1998 (S. 209–212)

In dieser 11. Auflage des *Bergmann · Schaefer* fehlt der Textteil über die Weltraumfahrt und die Apollo-Missionen, den die 10. Auflage [40] noch enthält. Legen Sie auf diesen Teil Wert, sollten sie im Antiquariat nach der 10. oder 9. Auflage suchen!

[36] Pfeifer, Harry, und Herbert Schiedel: *Grundwissen Experimentalphysik.* B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart · Leipzig, 1997 (S. 31f.)

[37] Gawlista, Ralf: *Übungsaufgaben zu* analytischer klassischer *Mechanik. Mit 29 Abbildungen.* Gawl (Dr. rer. nat. Ralf Gawlista), Bochum, 1997 (S. 34–38)

[38] Berger, Vernon, and Martin Olsson: *Classical Mechanics: A Modern Perspective*, Second Edition. McGraw-Hill, Inc., New York, © 1995, 1973 (p. 113–115; and problems pp. 130–132; for a solution, see p. 402)

[39] Kittel, Charles, Walter D. Knight, Malvin A. Ruderman, A. Carl Helmholz, Burton J. Moyer: *Berkeley Physik Kurs, Band 1: Mechanik*, 5. Auflage [Übersetzung des englischsprachigen *Berkeley Physics Course – Volume 1: Mechanics*, Second Edition. McGraw-Hill Book Company, 1973]. Friedr.Vieweg+Sohn, Braunschweig, 1994 (S. 113)

Stellen Sie das Buch nicht ins Fach zurück, wenn Sie keine *Rakete* im Sachwortverzeichnis finden; schauen Sie unter dem Stichwort *Raumschiff* nach! Leider wird in der 5. Auflage, anders als in der 1. Auflage, die relativistische Raketenbewegung nicht mehr behandelt. Trotzdem: das Buch ist Klasse – wie alle anderen Berkeley-Physik-Kurs-Bände!

(In der deutschen 1. Auflage finden Sie im Sachwortverzeichnis nicht einmal das Stichwort *Raumschiff*, zum Ausgleich aber zweimal etwas über die Raketenbewegung: S. 124 zur nichtrelativistischen Bewegung und S. 277f. Text und Übungsaufgabe zur relativistischen Bewegung.)

[40] Gobrecht, Heinrich: *Bergmann · Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 1: Mechanik, Akustik, Wärme*, 10. Auflage, unter Mitarbeit von Jürgen H. Gobrecht und Klaus H. Gobrecht. Walter de Gruyter, Berlin 1990 (S. 231–234, 238, 250)

In dieser 10. Auflage wie in der 9. Auflage finden Sie Abschnitte über die Weltraumfahrt allgemein und über die Apollo-Mondlande-Missionen insbesondere.

[41] Schmutzer, Ernst: *Grundlagen der Theoretischen Physik mit einem Grundriß der Mathematik für Physiker, Teil I.* BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1989 (S. 327–329)

[42] Kagermann, Hennig, und Walter Köhler: *Aufgabensammlung Theoretische Physik. Teil 1: Mechanik: 96 Aufgaben mit vollst. Lösungen*, 2. Auflage. Verlag Zimmermann-Neufang, Ulmen, 1. Auflage 1983, 2. Auflage 1986 (S. 58–60)

[43] Goldstein, Herbert: *Klassische Mechanik*, 8. Auflage [Übersetzung der 6. amerikanischen Auflage *Classical Mechanics*, Addison Wesley Publishing Company Inc., Reading. Mass. und London]. AULA-Verlag, Wiesbaden, Verlag für Wissenschaft und Forschung, ©1985 (S. 30f., 236f.)

[44] Greiner, Walter: *Theoretische Physik. Ein Lehr- und Übungsbuch für Anfangssemester. Band 1: Mechanik. Mit zahlreichen Abbildungen, Beispielen und Aufgaben mit ausführlichen Lösungen sowie einer Einführung in die Vektorrechnung*, 4. Auflage. Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 1984 (S. 225–227)

[45] Meyer, Heinz, unter Mitwirkung von Georg Schumpich: *Teil 2. Kinematik und Kinetik*, 4. Auflage, des Lehrbuchs Holzmann, Günther: *Technische Mechanik*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1979 (S. 120–125; und vorher auf S. 87f. eine Übungsaufgabe zum senkrechten Wurf im Feld einer Punktmasse)

[46] Heywang, Fritz, und Hanskarl Treiber: *Aufgabensammlung zur Physik*, 7. Auflage. Bernh. Friedr. Voigt (alle Rechte liegen bei dem Verlag Handwerk und Technik, Blumenstr. 38, Hamburg 60), 1979 (S. 28, 142, 182)

[47] Neuert, Hugo: *Physik für Naturwissenschaftller: für Chemiker, Biologen, Geowissenschaftler. Band 1. Mechanik und Wärmelehre* (BI-Hochschultaschenbücher Band 727). Bibliographisches Institut, Mannheim, 1977 (S. 30)

[48] Grimsehl, E. (begründet von Prof. E. Grimsehl, weitergeführt von Dr. W. Schallreuter, neu bearbeitet von Prof. Dr. K. Altenburg): *Lehrbuch der Physik. Band 1. Mechanik · Akustik · Wärmelehre*, 22. Auflage. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1977 (S. 392f.)

[49] Orear, Jay: *Grundlagen der modernen Physik*, 2. Auflage der deutschen Ausgabe. Carl Hanser Verlag, München, 1973 [Titel der amerikanischen Originalausgabe: *Fundamental Physics*, Second Edition, © John Wiley & Sons, Inc., New York; Übersetzer und wissenschaftlicher Bearbeiter der deutschsprachigen Ausgabe: Dr. rer. nat. D. Albert, Dresden, wissenschaftlicher Bearbeiter der 2. deutschsprachigen Ausgabe: Prof. Dr. H. Hinrichs, Konstanz (S. 85–87)

[50] Volz, Helmut: *Einführung in die Theoretische Mechanik I. Mechanik der Kräfte*. Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt am Main, 1971 (S. 113f.)

[51] Bormann, M.: *Experimentalphysik I. Mechanik, Akustik, Wärmelehre.* Manuskript einer Vorlesung für Studenten der Physik und Mathematik an der Universität Hamburg (Universitätsdruck), ca. 1970/71 (S. 116f.)

[52] Czech, Walter: *Aufgaben zur Experimentalphysik für Physiker, Mathematiker, Chemiker, Maschinenbauer und Elektrotechniker.* Friedr.Vieweg + Sohn, Braunschweig, 1970 (S. 13–15)

[53] Landau, L. D. , A. I. Achieser, E. M. Lifschitz: *Mechanik und Molekularphysik*, in deutscher Sprache herausgegeben von Frank Kaschluhn. Akademie-Verlag, Berlin 1970 [Übersetzung aus dem Russischen von Dr. Jürgen Burmeister und Dr. Jürgen Wolf, wissenschaftliche Redaktion: Prof. Dr. Frank Kaschluhn; der Originaltitel erschien im Verlag Nauka, Hauptredaktion für physikalisch-mathematische Literatur, Moskau, 1965] (S. 6f.)

[54] Bauchert, Jens, Günter Hesse, Siegfried Kessel, Jürgen Lenz: *Aufgaben zur Mechanik der Punkte und starren Körper.* Bibliographisches Institut, Mannheim, 1969 (S. 90–92)

[55] Budo, Ágoston: *Theoretische Mechanik*, 4. Auflage. [Übersetzung der (vom Autor für die deutsche Ausgabe erheblich erweiterten) ungarischen Originalausgabe *Mechanika.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1953] Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1967, 604 Seiten (S. 241–244)

[56] Falk, G.: *Theoretische Physik auf der Grundlage einer allgemeinen Dynamik. Band Ia. Aufgaben und Ergänzungen zur Punktmechanik.* Springer-Verlag, Berlin, 1966 (S. 33–35)

[57] Döring, Werner:*Einführung in die Theoretische Physik. I Mechanik* (Sammlung Göschen Band 76), 3. Auflage. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1965 (S. 60f.)

[58] Flügge, Siegfried: *Lehrbuch der Theoretischen Physik. Band I. Einführung. Elementare Mechanik und Kontinuumsphysik.* Springer-Verlag, Berlin, 1961 (S. 216f.)

[59] Sommerfeld, Arnold: *Vorlesungen über theoretische Physik, Band I, Mechanik*, 5. Auflage, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1955 (S. 28f., 232, 248)

Ein Ausblick auf die Spezielle Relativitätstheorie, auch auf die relativistische Raketenbewegung:

[60] Sexl, Roman, und Herbert Kurt Schmidt: *Raum – Zeit – Relativität*, 3. Auflage, ein Buch der Reihe *vieweg studium Physik Grundkurs.* Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1990

Ein nützliches Sachbuch der fünfziger Jahre:

[61] Gartmann, Heinz: *Jahrhundert der Raketen.* Verlag Paul Müller, München, 1958